DEVOIR MAISON 8

Exercice 1 – On considère l'application φ définie par :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(1)X^3 - XP' \end{array}$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique (notée $\mathcal{B}$) de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le noyau de A. En déduire le noyau de φ.
4. Déterminer l'image de A. En déduire l'image de φ.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaire dans $\mathbb{R}_3[X]$.
6. On note $\mathcal{C} = (X, X^2, X^3, X^3 + 2)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
7. Déterminer la matrice B de φ dans la base $\mathcal{C}$.
8. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$, puis donner une relation entre P, A et B.

Exercice 2 – On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}\left(X_2 = 0\right), P_{[X_1=0]}\left(X_2 = 1\right), P_{[X_1=1]}\left(X_2 = 1\right), P_{[X_1=1]}\left(X_2 = 2\right)$$

   (b) En déduire la loi de X_2.

   (c) Vérifier que :

$$E\left(X_2\right) = \frac{19}{18}$$

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P\left(X_n = 0\right)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi, après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la ($n+1$)-ième boule s'effectuera dans U.

   On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la ($n+1$)-ième boule s'effectuera dans V.
5. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P\left(X_{n+1} = 1\right) = \frac{3}{4} \times P\left(X_n = 1\right) + \frac{2}{3} \times P\left(X_n = 0\right) \quad (R_1)$$

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$$

   Déduire du résultat (R_1) que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

7. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

   (b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.