DEVOIR MAISON 7

Exercice 1 – Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite $N-$périodique lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+N} = u_n$.

On note P_N l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui sont $N-$périodiques.

1. Donner un exemple de suite $1-$périodique. Quelles sont les suites $1-$périodiques ?
2. Donner un exemple de suite $2-$périodique qui ne soit pas $1-$périodique.
3. On fixe un entier $N \geqslant 1$. Montrer que P_N est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.
4. Les sous-espaces vectoriels P_5 et P_3 sont-ils en somme directe ?
5. On note P l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui sont périodiques (c'est-à-dire $N-$périodiques pour une certaine valeur de $N \geqslant 1$, qui dépend de la suite choisie). P est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? (Question plus difficile)

Exercice 2 – On note C_r l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on pose

$$H = \{f - g \mid f, g \in C_r\}.$$

1. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note V_f la fonction définie par :

$$V_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   appelée variation de f. Démontrer que V_f et $W_f = V_f - f$ sont deux éléments de l'ensemble C_r.
3. En déduire que $H = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. (a) Trouver les fonctions V_f et W_f lorsque f est la fonction $x \mapsto x^2$. Tracer les courbes f, V_f et W_f sur un même graphique.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty; a]$ et décroissante sur $[a; +\infty[$. Calculer V_f et W_f.
   (c) En extrapolant ce qui a été fait dans les questions précédentes, tracer les courbes de sin, $V_{\sin}$ et $W_{\sin}$ sur un même graphique en se limitant à l'intervalle $[0; 3\pi]$.