DEVOIR MAISON 6

Exercice 1 –

1. On considère l'application :

$$f : \left[-\frac{1}{4}, \pi\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\cos(2x) - \sqrt{1+4x}}{\sin x}.$$

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$x \mapsto \cos(2x) - \sqrt{1+4x}.$$

   (b) En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction f.

   (c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, expliciter ce prolongement $\widetilde{f}$ et indiquer s'il est dérivable en 0 (en précisant la valeur éventuelle de $\widetilde{f}'(0)$).

   (d) Le graphe de la fonction $\widetilde{f}$ admet-il une tangente en 0 ? Si oui, en donner une équation cartésienne, et étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

   (e) Illustrer graphiquement les résultats obtenus.

2. On considère l'application :

$$g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

   (a) Déterminer un équivalent du dénominateur de g en $+\infty$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

   On pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

   (b) Expliciter le développement limité d'ordre 2 en 0 de $u \mapsto h\left(\dfrac{1}{u}\right)$.

   (c) En déduire la valeur des réels a, b et c tels qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$g(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (d) Interpréter ce résultat en terme d'asymptote à la courbe de g en $+\infty$, en précisant leurs positions relatives.

   (e) Illustrer graphiquement les résultats obtenus.

Exercice 2 – On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les ensembles de points du plan $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, définis par les équations suivantes :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4y = 0 \qquad \mathcal{C}' : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles, dont on précisera les centres Ω et Ω' ainsi que les rayons R et R'.

2. Déterminer la nature de l'intersection de ces deux cercles.

3. Soit $A(a,b)$ un point du cercle $\mathcal{C}$. Déterminer une équation de T_A, la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
   Ne pas oublier que $a^2+b^2-4b=0$ *pour simplifier l'équation obtenue.*
4. Démontrer que la distance entre Ω' et T_A est égale à $2|a-1|$.
5. En déduire qu'il existe 4 points du cercle $\mathcal{C}$ tels que la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point soit aussi tangente à $\mathcal{C}'$. On donnera les coordonnées de ces 4 points, qui seront notés, par ordonnées croissantes : B, C, D, E.
   On devrait voir apparaître des $\sqrt{7}$ *et* $\sqrt{15}$.
6. Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de Ω' sur T_E.
7. Déterminer les coordonnées du point I qui est l'intersection de T_B et T_E.
   Ce point I *est l'unique point depuis lequel le cercle* $\mathcal{C}'$ *réalise une éclipse parfaite du cercle* $\mathcal{C}$.
8. Dans un repère orthonormé, représenter les cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, les points B, C, D, E, H, I et les droites T_B, T_C, T_D et T_E