DEVOIR MAISON 4

Exercice 1 – On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2+\ln(x)-2$.
On donne $\ln(2)\approx 0,7$.

1. (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g.
   (b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ d'inconnue $x>0$ admet une unique solution que l'on notera α. Justifier que $1<\alpha<2$.
   (d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x<\alpha, x=\alpha, x>\alpha$.
   (e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g, en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x=1, x=\alpha, x=2$.
2. (a) Montrer grâce à une intégration par parties que :

$$\int_1^\alpha \ln(x)\mathrm{d}x=\alpha\ln(\alpha)-\alpha+1$$

   (b) En utilisant la relation vérifiée par α, montrer que :

$$\int_1^\alpha g(x)\mathrm{d}x=\frac{8-2\alpha^3}{3}-\alpha$$

   (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1/e/.

   On définit maintenant une suite qui déterminera une valeur approchée du réel α obtenu en question 1/**c**/.
   À cet effet, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=1 \text{ et pour tout entier naturel } n : u_{n+1}=\sqrt{2-\ln(u_n)}$$

3. (a) On note pour tout réel $x\in[1,2], h(x)=\sqrt{2-\ln(x)}$. Vérifier que h est dérivable sur $[1,2]$ et que pour tout réel $x\in[1,2], h'(x)=-\dfrac{1}{2xh(x)}$ puis donner le tableau des variations de h avec les valeurs aux bornes. Justifier que $\sqrt{2}\leqslant 2$, que $\sqrt{2-\ln(2)}\geqslant 1$ et que pour tout $x\in[1,2]$, $h(x)\in[1,2]$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n : u_n existe et $u_n\in[1,2]$.
   (c) Montrer que pour tout réel $x\in[1,2]$, $\left|h'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$. Vérifier que $h(\alpha)=\alpha$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

   Indication : appliquer l'inégalité des accroissements finis (théorème 21.55) aux réels $x=u_n$ et $y=\alpha$.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel n : $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est le réel α.

Exercice 2 – Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes à coefficients réels définie par

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 16P_{n+2}(x) = 8(2x+1)P_{n+1}(x) - P_n(x)$$

1. (a) Déterminer P_2 et P_3.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1 .
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-1-x) = (-1)^n P_n(x)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si α est racine de P_n alors $-1-\alpha$ est aussi racine de P_n.
   (c) En déduire aussi une racine commune à tous les polynômes P_{2n+1}.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f_n(t) = P_n\left(-(\cos(t))^2\right)$.
3. (a) Vérifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2\cos(a)\cos(b) - \cos(a-b) = \cos(a+b)$.
   (b) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2nt)$$

   (c) En déduire $P_n(0)$ et $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(2nt) = 0$ d'inconnue $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Montrer que l'application $t \longmapsto \cos(t)^2$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire que P_n a n racines distinctes puis factoriser P_n.
   (d) Montrer finalement que

   $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2 = \frac{1}{2^{2n-1}}$$