DEVOIR MAISON 4

Exercice 1 (Une équation différentielle d'ordre 3) –
On se propose de résoudre l'équation différentielle (on rappelle que $y^{(3)}$ note la dérivée troisième de y).

$$(E) \quad y^{(3)} - 6y'' + y' + 14y = 28x^3 + 20x^2 - 9$$

On appelle équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) : \; y^{(3)} - 6y'' + y' + 14y = 0$$

1. Soit $\beta \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur β pour que la fonction $h_\beta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\beta x} \end{array}$ soit solution de (E_0).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable. On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\,e^{-2x} \end{array}$.
   (a) Montrer que f est solution de (E_0) si, et seulement si, g' est solution de $(F) : \; y'' - 11y = 0$.
   (b) Résoudre l'équation (F) puis l'équation (E_0).
3. Démontrer que si f_p est une solution particulière de (E) et S_h est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée, alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{f_p + f_h \mid f_h \in S_h\}$.
4. Résoudre (E) (on pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3).

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, on pose $I_0 = \displaystyle\int_1^e t \, dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^e t(\ln t)^n \, dt$.

1. (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \geqslant 0$
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
2. (a) Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $[1, e]$ par :
   $$\forall t \in [1, e] \quad f_n(t) = (\ln t)^{n+1}$$
   On note f_n' la dérivée de f_n. Pour tout $t \in [1, e]$, calculer $f_n'(t)$
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation (*) suivante :
   $$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \quad (*)$$
   (c) En déduire la valeur de I_1.
   (d) En utilisant la relation $(*)$ et la décroissance de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$, établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
   $$\frac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2}$$
   (e) En déduire les limites respectives des deux suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(nI_n)_{n\geqslant 0}$.
   (f) Utiliser la relation $(*)$ pour compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle calcule et affiche I_n pour une valeur de n donnée :

```
import numpy as np
def calculI(n):
    I=.....
    for k in range(n):
        I=.....
    return I
```

3. (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{(3n+10)\mathrm{e}^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1} + I_n \leqslant \frac{(3n+7)\mathrm{e}^2}{(n+2)(n+3)}$$

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n\left(\mathrm{e}^2 - nI_n\right)$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 3\mathrm{e}^2$$

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(\mathrm{e}^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1\right)$$