DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 – On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=x\mathrm{e}^x-1$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$. En déduire le tableau des variations de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$. Vérifier que $\alpha\in[0,1]$.
   (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x)=\frac{g(x)}{x}$$
   En déduire le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.
   (c) Justifier que le réel α vérifie $\dfrac{1}{\alpha}=\mathrm{e}^\alpha$. En déduire que $f(\alpha)=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$.
3. (a) Calculer pour tout réel $x\in]0,+\infty[$, $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $]0,+\infty[$.
4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm . On donne $\alpha\simeq 0,57$ et $f(\alpha)\simeq 2,33$.

Exercice 2 – Soit un entier $n\geqslant 3$ et soit f_n l'application définie par :

$$f_n:\left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^n-nx+1\end{array}\right.$$

1. On définit sur $[0,+\infty[$ la fonction g_n par :
   $$\forall x\in[0,+\infty[,\quad g_n(x)=x^{n-1}-1$$
   (a) Etudier les variations de g_n sur $[0,+\infty[$.
   (b) En déduire le signe de la fonction g_n sur $[0,+\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f_n sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer (soigneusement) que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0<\alpha_n<1<\beta_n$.
4. Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Soit $n\geqslant 3$. Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ et déterminer le signe de cette expression sur $]0,1[$.
   (b) En appliquant le résultat de la question précédente au réel α_n, déterminer le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$.
   (c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n^n=0$.
   (e) En raisonnant par l'absurde, montrer que la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ vaut 0 .
   (f) Montrer que $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

5. Étude de suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Soit $n \geqslant 3$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :
   $$f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-n=\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{(\sqrt{n})^k}$$
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 3, f_n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\geqslant n$.
   (c) Montrer alors que pour tout entier $n \geqslant 3$,
   $$1\leqslant \beta_n \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$
   (d) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 3 –

Partie A - Étude de la fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique, notée th, est définie par $\text{th}(x)=\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ pour tout x réel.

1. Donner l'expression de sa dérivée, ses variations et ses limites.
2. Montrer que la fonction th établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. La bijection réciproque est notée argth ("argument tangente hyperbolique").
3. Montrer que la fonction argth est impaire.
4. Montrer que la fonction argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Pour $x \in I$, exprimer argth(x) à l'aide de fonctions usuelles.

Partie B - Étude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, vérifiant la relation
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x)=\frac{2f(x)}{1+f(x)^2}\,(\star).$$

1. Déterminer les fonctions constantes vérifiant $(\star)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$ si f vérifie $(\star)$?
3. Montrer que, pour tout réel t, on a l'encadrement $-1\leqslant \dfrac{2t}{1+t^2}\leqslant 1$. Que peut-on en déduire pour une fonction f solution de $(\star)$?
4. Montrer que la fonction th est solution de l'équation fonctionnelle $(\star)$.