CORRIGÉ DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 –

1. Le domaine de définition de f est $\boxed{D = \mathbb{R}^*.}$
2. f ne peut pas être périodique, car son domaine de définition ne le permet pas.
   D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
   $$f(-x) = 2\arctan\left(\frac{-x}{2}\right) + \frac{2}{-x} = -2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x} = -f(x).$$
   Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$. On va donc restreindre la suite de cette étude à $\boxed{D' = \mathbb{R}_+^*.}$
3. Les limites ne présentent pas de forme indéterminées. On a immédiatement que
   $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi.}$$
   f est dérivable sur D' et pour tout $x \in D'$, on a
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{4}{4+x^2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{4x^2 - 2(4+x^2)}{(4+x^2)x^2} \\ &= \frac{2(x^2-4)}{(4+x^2)x^2} \end{aligned}$$
   Comme le dénominateur de cette expression est toujours strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de (x^2-4). On en déduit le tableau de variation de f :

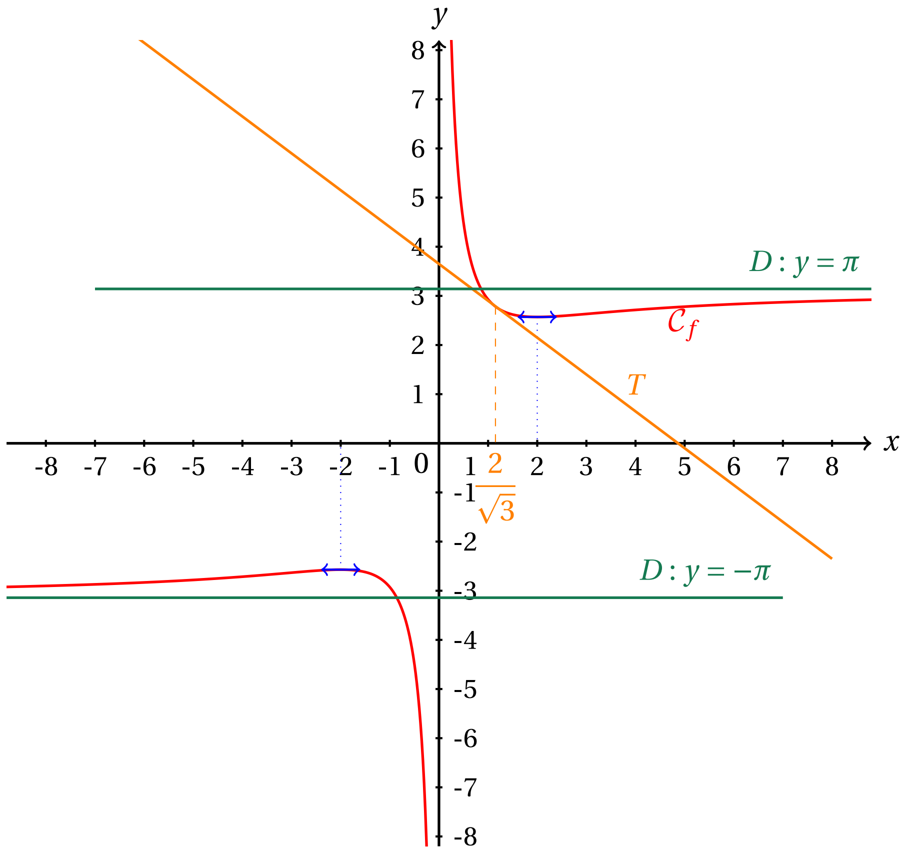
x	0		2		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\nearrow$	π

4. D'après 3., $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0 \text{ en } 0^+}$ et une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = \pi \text{ en } +\infty}$.
   Comme f est croissante au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de cette asymptote}}$.
5. L'équation de la tangente T au point d'abscisse $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ est
   $$(E_T): \qquad y = f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$
   Or, $f'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4\right)}{\left(4+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{\frac{-16}{3}}{\frac{16}{3}\times\frac{4}{3}} = -\dfrac{3}{4}$

et $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}$.

L'équation de T est donc $\boxed{y = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad (E_T).}$

6.



Exercice 2 – Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, en posant $y = z^4$, on a

$$(E) \iff y^2 + (1-i)y - (2+2i) = 0.$$

L'expression polynômiale $y^2 + (1-i)y - (2+2i)$ a pour discriminant

$$\Delta = (1-i)^2 + 4(2+2i) = 8 + 6i.$$

On détermine une racine carrée de Δ. Soit $\delta = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\delta^2 = \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 6 \\ 2ab & = & 8 \\ a^2 + b^2 & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 & = & 18 \\ 2ab & = & 6 \\ a^2 + b^2 & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 3 \text{ ou } -3 \\ b = \dfrac{3}{a} \end{array}\right.$$

Ainsi, $3 + i$ est un racine carrée de Δ.
$\Delta \neq 0$, donc $y^2 + (1-i)y - (2+2i)$ a deux racines y_1 et y_2 avec

$$y_1 = \frac{i - 1 + 3 + i}{2} = 1 + i \qquad y_2 = \frac{i - 1 - 3 - i}{2} = -2$$

On en déduit que

$$(E) \iff y \in \{-2, 1+i\} \iff z^4 \in \{-2, 1+i\}.$$

Déterminons à présent les racines quatrièmes de -2 et $1 + i$.

$-2 = 2\,e^{i\pi}$, donc ses racines quatrièmes sont

$$\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4})},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4})},$$

c'est-à-dire :

$$\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}},\quad \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc ses racines quatrièmes sont

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{16}},\quad \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{i(\frac{\pi}{16}+\frac{2\pi}{4})},\quad \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{i(\frac{\pi}{16}+\frac{4\pi}{4})},\quad \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{i(\frac{\pi}{16}+\frac{6\pi}{4})},$$

c'est-à-dire :

$$\sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{\pi}{16}},\quad \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{16}},\quad \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{16}},\quad \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{25\pi}{16}}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\ \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}},\ \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}},\ \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{\pi}{16}},\ \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{16}},\ \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{16}},\ \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{25\pi}{16}}\right\}}$$

Exercice 3 –

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, elle est strictement décroissante sur $[1,3]$. On a $f(1) = 3$ et $f(3) = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$. On a alors le tableau de variations suivant :

x	1	3
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variations de f	3 $\searrow$	$\dfrac{5}{3}$

2. On remarque que $\dfrac{5}{3} \geqslant 1$ donc $\left[\dfrac{5}{3}, 3\right] \subset [1,3]$. Or d'après la question précédente, on a : $f([1,3]) = \left[\dfrac{5}{3}, 3\right]$ donc $\boxed{f([1,3]) \subset [1,3]}$.

3. Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$ »

   Initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ d'après l'énoncé donc u_0 existe et $u_0 \in [1,3]$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On sait donc que u_n existe et que $u_n \in [1,3]$. Comme f est définie sur $]0,+\infty[$ et $[1,3] \subset]0,+\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie. Par ailleurs, comme, d'après la question précédente, $f([1,3]) \subset [1,3]$ et que d'après l'hypothèse de récurrence $u_n \in [1,3]$, on a bien $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,3]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion D'après le principe de récurrence, on a démontré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\left(f(u_{2n})\right) = f \circ f(v_n) = g(v_n)$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = g(v_n)}$.

(b) On a $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = f(f(u_1)) = f(f(1)) = f(3) = \frac{5}{3}$. On a donc $\boxed{v_0 = 1 \leqslant \frac{5}{3} = v_1}$.

(c) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1}$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a bien $v_0 \leqslant v_1$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $v_n \leqslant v_{n+1}$. Appliquons alors deux fois la fonction f qui est décroissante d'après la question 2 . Il vient alors $f(v_n) \geqslant f(v_{n+1})$ puis $f\left(f(v_n)\right) \leqslant f\left(f(v_{n+1})\right)$ c'est à dire, $g(v_n) \leqslant g(v_{n+1})$ ou, d'après la question 4.(a), $v_{n+1} \leqslant v_{n+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (v_n) est croissante.

5. (a) On suit le même raisonnement qu'à la question 5.(a). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f\left(f(u_{2n+1})\right) = f \circ f(w_n) = g(w_n)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_{n+1} = g(w_n)}$.

(b) On suit le raisonnement des questions 5.(b) et 5.(c).

D'abord $w_0 = u_1 = f(1) = 3$ et $w_1 = u_3 = f(u_2) = \frac{11}{5}$. Ainsi, $\boxed{w_0 \geqslant w_1}$. Puis, on démontre par récurrence, comme à la question 5.(c) que (w_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $w_{n+1} \leqslant w_n$ ».

Initialisation Pour $n = 0$, on a bien $w_1 \leqslant w_0$ d'après ce qui précède. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $w_{n+1} \leqslant w_n$. Appliquons alors deux fois la fonction f qui est décroissante d'après la question 2 . Il vient alors $f(w_{n+1}) \geqslant f(w_n)$ puis $f\left(f(w_{n+1})\right) \leqslant f\left(f(w_n)\right)$ c'est à dire, $g(w_{n+1}) \leqslant g(w_n)$ ou, d'après la question 4.(a), $w_{n+2} \leqslant w_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (w_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$.

6. La suite (v_n) est croissante et d'après la question 4. elle est majorée par 3. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{elle converge vers une limite } \ell}$. De même, la suite (w_n) est décroissante et d'après la question 3 . elle est minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{elle converge vers un réel } \ell'}$.

7. Soit $x \in [1,3]$. Alors
$$g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{2}{f(x)} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}.$$

8. Cherchons alors les points fixes de g sur $[1,3]$. Soit $x \in [1,3]$.
$$g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{3x+2}{x+2} = x \Longleftrightarrow 3x+2 = x(x+2) \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-2) = 0.$$
Ainsi g a un unique point fixe sur $[1,3]$ qui est $\boxed{x = 2}$.

9. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. On sait que la suite $(v_n)_n$ converge vers une limite ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction g est continue sur $[1,3]$ (composée de fonctions continues sur cet intervalle) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = g(\ell)$. Ainsi par unicité de la limite, on a $g(\ell) = \ell$. Or d'après la question précédente, g possède un unique point fixe sur $[1,3]$ qui vaut 2 donc $\ell = 2$. Ainsi la suite $\boxed{(v_n)_n \text{ converge vers } 2}$.

On montre exactement de la même manière que la suite $\boxed{(w_n)_n \text{ converge vers } 2}$.

10. Nous avons démontré, dans les questions précédentes, que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Ainsi, d'après le théorème des deux suites extraites, (u_n) converge vers cette même limite. En conclusion, la suite $\boxed{(u_n)_n \text{ converge vers } 2}$.