DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – On considère la fonction f dont l'expression est

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{x}.$$

Le but de cet exercice est de tracer $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer D le domaine de définition de f.
2. Étudier la périodicité et la parité/imparité éventuelle de f. Le cas échéant, en déduire un domaine d'étude D' réduit.
3. Dresser le tableau de variations de f (on n'oubliera pas d'y faire figurer les limites de f aux bornes de D').
4. La fonction f admet-elle des asymptotes, horizontales ou verticales ? Si oui, donner leurs équations. Pour les asymptotes horizontales, préciser si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus ou en-dessous de l'asymptote.
5. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
6. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé. On y fera figurer tout ce qui a été trouvé aux questions précédentes et les tangentes horizontales.

Exercice 2 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \qquad z^8 + (1-i)z^4 - 2 - 2i = 0.$$

Exercice 3 – Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

On considère alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[1,3]$.
2. En déduire que : $f([1,3]) \subset [1,3]$, c'est à dire que : $\forall x \in [1,3], f(x) \in [1,3]$.
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [1,3]$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Déterminer v_0 et v_1. En déduire que $v_0 \leqslant v_1$.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = g(w_n)$ où $g = f \circ f$.
   (b) Etudier la monotonie de $(w_n)_{n\geqslant 0}$.
6. En déduire que les suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes.
7. Déterminer l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [1,3]$.
8. En déduire les points fixes de g sur cet intervalle, c'est à dire les réels x vérifiant $g(x) = x$.
9. Déterminer les limites respectives de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$.
10. Conclure.