Corrigé Devoir Maison 1

Exercice 1 – Étude des fonctions f_n

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ en tant que quotient de fonctions dérivables et $\boxed{f_n'(x) = \dfrac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}.}$
2. Soit $x \in]0\,;+\infty[$.

$$f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow n-2-2n\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x) = \frac{n-2}{2n} \Longleftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}$$

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f_n'(x) = 0 \text{ est } \left\{e^{\frac{n-2}{2n}}\right\}.}$

Soit $x \in]0\,;+\infty[$.

$$f_n'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow n-2-2n\ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \leqslant \frac{n-2}{2n} \Longleftrightarrow x \leqslant e^{\frac{n-2}{2n}}$$

donc $\boxed{f_n' \text{ est positive sur } \left]0\,; e^{\frac{n-2}{2n}}\right] \text{ et négative sur } \left[e^{\frac{n-2}{2n}}\,;+\infty\right[.}$

3. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+n\ln(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty.}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et, avec le théorème des croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.}$$

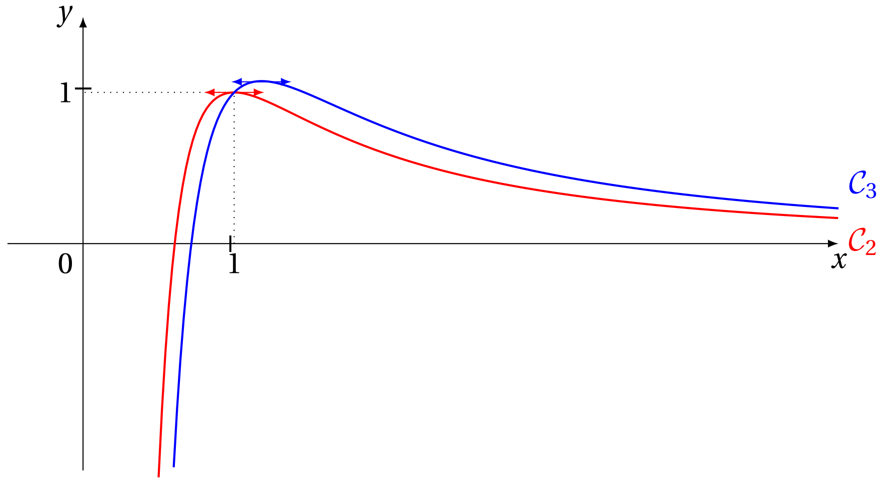
4. D'après la question A-2., f_n est décroissante sur $\left]0\,; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ et croissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, $\boxed{\text{elle admet un maximum en } e^{\frac{n-2}{2n}} \text{ qui vaut } f_n(e^{\frac{n-2}{2n}}) = \dfrac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}.}$

x	0		$e^{\frac{n-2}{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$	$\searrow$	0

Représentation graphique de quelques fonctions f_n

5.



6. (a) On a $\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}.}$ Cette expression est indépendante de n.

   (b) Soit $x > 0$. Notons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $y_m = f_m(x)$. D'après la question précédente, $y_3 - y_2 = y_4 - y_3$, donc on peut obtenir le point de coordonnées $(x; y_4)$ en faisant une translation de vecteur $(y_3 - y_2)\vec{\jmath}$ à partir du point de coordonnées $(x; y_3)$: en travaillant point par point, on peut ainsi reconstruire toute la courbe $\mathcal{C}_4$.

Exercice 2 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(x+\frac{\pi}{6}) = -\sin(3x) &\iff \cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(3x+\frac{\pi}{2}) \\
&\iff x+\frac{\pi}{6} \equiv 3x+\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x+\frac{\pi}{6} \equiv -3x-\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\iff x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\frac{\pi}{2}].
\end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
3\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) = 3 &\iff 3(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + 2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = 6 \\
&\iff 5\,\mathrm{e}^x - 6 + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\
&\iff \mathrm{e}^{-x}(5\,\mathrm{e}^{2x} - 6\,\mathrm{e}^x + 1) = 0 \\
&\iff (\mathrm{e}^x - 1)(5\,\mathrm{e}^x - 1) \\
&\iff \mathrm{e}^x = 1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-\ln(5), 0\}$.

3. (a) En factorisant $1+i$ par son module, on a

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1-i = \overline{1+i} = \overline{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}.$$

On a obtenu les formes exponentielles : $\boxed{1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1-i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}.}$

(b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}} \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{-1+\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}(\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{8}}+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}})}{-\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{8}}(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}-\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{8}})} \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \end{aligned}$$

Comme cos est paire et sin impaire, on a

$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Et comme $\dfrac{1}{-i} = i$, on a bien $\boxed{z = i\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}.}$

(c) Comme $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, on a $z = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\,\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

Or, la fonction tan est positive sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$, donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$, ce qui signifie que l'on a bien obtenu la forme exponentielle de z. Ainsi,

$\boxed{|z| = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)} \text{ et } \dfrac{3\pi}{4} \text{ est un argument de } z.}$

(d) En multipliant par le conjugué du dénominateur, on a :

$$z = \frac{(1+i+\sqrt{2})(1+i-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})^2+(-1)^2} = \frac{(1+i)^2-(\sqrt{2})^2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2i-2}{4-2\sqrt{2}}$$

On obtient donc la forme algébrique $\boxed{z = \dfrac{-1}{2-\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}.}$

(e) Ainsi,

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2-\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

En simplifiant par $\sqrt{2}$, on trouve donc $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

D'après la question 3, le module de z est $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$, donc $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1.}$