DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}.$$

Étude des fonctions f_n

1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ d'inconnue x réelle. Etudier le signe de f_n'.
3. Déterminer la limite de f_n aux bornes de son intervalle de définition.
4. Établir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

Représentation graphique de quelques fonctions f_n
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

5. Tracer $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
6. (a) Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $\mathcal{C}_4$ à partir de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Exercice 2 –

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle :
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin(3x).$$
2. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle :
$$3\,\mathrm{ch}(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) = 3.$$
3. On pose $z = \dfrac{\sqrt{2}+1+i}{-\sqrt{2}+1-i}$.
   (a) Ecrire $1+i$ et $1-i$ sous forme exponentielle.
   (b) En factorisant par l'angle moitié, montrer que
$$z = i\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$
   (c) En déduire le module et un argument de z.
   (d) Mettre z sous forme algébrique.
   (e) En calculant le module de z d'une autre façon qu'à la question 4)c), déterminer $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.