COLLES – QUINZAINE 3

Exercice 1 (Question de cours) – Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exercice 2 (Question de cours) – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Exercice 3 (Question de cours) – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

Exercice 4 – Soit $f : x \mapsto x + \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Montrer que les droites $D : y = x + 1$ et $D' : y = x - 1$ sont des asymptotes de la courbe représentative de fonction f.
5. Déterminer les variations de f.
6. Tracer f.

Exercice 5 – Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0 pour toutes les valeurs de m sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 1 pour toutes les valeurs de m sont concourantes en un même point.

Exercice 6 – On pose a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Étudier $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

Exercice 7 – On étudie la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Déterminer les variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 8 – Étudier et tracer la fonction $f : x \mapsto \sin^5(x) + \cos^5(x)$.

Exercice 9 –

1. Étudier la fonction $u : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 10 –

1. Etudier la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Soient m et n des entiers strictement positifs. Montrer que

$$n^m = m^n \Leftrightarrow f(n) = f(m).$$

3. Déterminer tous les entiers strictement positifs m et n tels que $n^m = m^n$.

Exercice 11 – On considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1;+\infty[$ et en-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0;1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$.
   (b) Montrer que :
   $$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$$
   En déduire que $g(x)$ est strictement positif sur $]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$
   (d) Déduire des questions précédents le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en **1.(a)**.
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 12 – On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau de variations de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. On donne $\ln(2) \simeq 0,7$.
3. Établir que f est concave sur $]0;+\infty[$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
   (b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0;+\infty[$.
5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0;+\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
   (b) Justifier que $\beta \in]1;2[$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. On donne $\alpha \simeq 0,06$ et $\beta \simeq 1,79$.