# COLLES – QUINZAINE 2

**Exercice 1** (Question de cours) – Définition et expression explicite d'une suite arithmétique, et d'une suite géométrique.

**Exercice 2** (Question de cours) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3** (Question de cours) – Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \qquad u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

**Exercice 4** – Dans cet exercice, on cherche à déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n.$$

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n = an + b$ avec $a$ et $b$ réel satisfaisant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On définit la suite $w = u - v$. Montrer que $w$ est une suite récurrente du second ordre à coefficients constants et sans second membre.
3. Donner l'expression du terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.

**Exercice 5** – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

Étudier les suites $u - v$ et $u + v$. En déduire les expression de $u_n$ et $v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 6** – On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{-1}{2}.$$

1. Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Exercice 7** – Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$. On note $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.
3. Montrer que $u$ et $v$ sont adjacentes.

**Exercice 8 –** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 5, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - (n+1).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = u_n - n - 2$. Montrer que $a_n$ est géométrique.
2. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Exercice 9 –** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

**Exercice 10 –** Résoudre dans $[0;4\pi]$ l'équation $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Exercice 11 –** Résoudre dans $[\pi;3\pi]$ l'inéquation $\sin(3x+7\pi)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Exercice 12 –** Résoudre dans $[\pi;3\pi]$ l'équation $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**Exercice 13 –** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)^2 = 0$$

**Exercice 14 –** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\cos(x)^2 + 9\cos(x) + 4 = 0$$

**Exercice 15 –** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(3+2i)(z-1) = i$
3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$
4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$.

On écrira les solutions sous forme algébrique.

**Exercice 16 –** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$$

**Exercice 17 –** On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure $ai$ avec $a \in \mathbb{R}$ à l'équation.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z-ai)\left(z^2 + bz + c\right)$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.

**Exercice 18 –** A tout nombre complexe $z$ différend de $1+i$, on associe le nombre $y_z = \dfrac{z-3i}{z-(1+i)}$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $y_z$ soit imaginaire pur.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $y_z$ soit réel strictement négatif.
3. Les représenter dans le plan complexe.