Colles – Quinzaine 1

Exercice 1 – Montrer les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] = \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] = \emptyset$

Exercice 2 – Résoudre l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 – Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2}{x} = -3$.

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$.

Exercice 5 – Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} < \dfrac{1}{x+7}$.

Exercice 6 – Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
Écrire avec des quantificateurs que f admet un minimum sur I.

Exercice 7 – Soient a et b deux réels.

1. Montrer que
$$a+b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ Ou } b \notin \mathbb{Q}.$$
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie quels que soient a et b?

Exercice 8 – Soit $n \geqslant 1$ un entier. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots x_n$ dans $[0;1]$.

1. Écrire avec des quantificateurs la proposition suivante :
"Deux de ces réels sont distants de moins de $\dfrac{1}{n}$."
2. Démontrer cette proposition.

Exercice 9 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$.

Exercice 10 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x-1 = \sqrt{x^2+x+13}$.

Exercice 11 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9-x = \sqrt{3+x}$.

Exercice 12 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-4| = |x-1|$ puis l'inéquation $|2x-4| \geqslant |x-1|$.

Exercice 13 – Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$ sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$.

Exercice 14 –

1. Montrer que pour tous nombres réels strictement positifs x et y,
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$
2. Montrer que pour tous nombres réels strictement positifs x, y et z,
$$(x+y)(y+z)(x+z) \geqslant 8xyz.$$

Exercice 15 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$|x| + |x+1| + |x+2| = 3.$$

Exercice 16 – Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$|x+12| = \left|x^2-8\right|, \qquad |x+12| \leqslant \left|x^2-8\right|$$