

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 3

Exercice 1 –

1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.

Solution : Pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. Soient a , b et c des réels. Donner la forme des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction du signe du discriminant (dont on rappellera la définition). On donnera également la factorisation de $ax^2 + bx + c$ dans les différents cas.

Solution : Soient a , b et c des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice 2 –

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 4} = 2x - 4$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, l'équation n'est bien définie que si $x^2 - 4 \geq 0$, i.e $x \in]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$. De plus, cette équation n'admet une solution que si $2x - 4 \geq 0$, i.e $x \in [2; +\infty[$.

Soit donc $x \in [2; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 4} = 2x - 4 &\iff x^2 - 4 = (2x - 4)^2 && \text{(car les deux termes sont positifs)} \\ &\iff x^2 - 4 = 4x^2 - 16x + 16 \\ &\iff 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 256 - 240 = 16$. Il y a donc deux solutions qui sont $x_1 = \frac{16 - 4}{6} = 2$ et $x_2 = \frac{16 + 4}{6} = \frac{10}{3}$. Ces deux solutions sont bien dans l'intervalle $[2; +\infty[$ donc

$$S = \left\{ 2; \frac{10}{3} \right\}$$

2. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{x+1} < \frac{x}{x-3}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} < \frac{x}{x-3} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-3} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-3-x(x+1)}{(x+1)(x-3)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2-3}{(x+1)(x-3)} < 0 \end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-x^2 - 3$	-	-	-	-
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	0	+
$\frac{-x^2-3}{(x+1)(x-3)}$	-	+	-	-

D'où,

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$