

CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 –

- $A = 4\sqrt{4 \times 6} - 5\sqrt{16 \times 6} + 4\sqrt{9 \times 6} = 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 0.$
 - $B = \frac{x^{15} \times x^2}{x^{-3}} = \frac{x^{17}}{x^{-3}} = x^{20}$
 - $C = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{8}{1-3} = -4.$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons que le dénominateur est bien non nul, et que l'expression a bien du sens. Multiplions par la quantité conjuguée, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Exercice 2 –

- nonA est l'assertion : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, (x \geq y \text{ OU } y \geq x+1).$

Montrons que nonA est vraie.

Posons $x = 0$. Soit $y \in \mathbb{N}$ quelconque. On distingue deux cas :

- si $y = 0$, alors $x \geq y$ donc $x \geq y \text{ OU } y \geq x+1$ est vraie.
- si $y > 0$, puisque y est entier, on a $y \geq 1$ donc $y \geq x+1$, donc $x \geq y \text{ OU } y \geq x+1$ est vraie.

Donc, par disjonction de cas, nonA est vraie et donc A est fausse.

- nonB est l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \neq y^3.$

Montrons que B est vraie. On pose $x = 1$ et $y = 1$. Alors $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 1 = y^3$. Donc B est vraie.

- nonC est l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (y > x \text{ ET } y^2 \geq x^2).$

Montrons que nonC est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = |x| + 1$. Alors $y \in \mathbb{R}$. On a $y \geq x+1 > x$ et $y^2 = |x|^2 + 2|x| + 1 \geq |x|^2 \geq x^2$.
Donc nonC est vraie et C est fausse.

- nonD est l'assertion $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x < 0 \text{ ET } x \geq e^y).$

D est vraie. Prouvons-le par disjonction de cas sur x .

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, alors $x \geq 0 \text{ OU } x < e^y$ est vraie.

Si $x < 0$, alors $e^y > 0 > x$, donc $x \geq 0 \text{ OU } x < e^y$ est vraie. Donc, par disjonction de cas, D est vraie.

Exercice 3 –

- « Si l'entier n est impair, alors l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 4. »
- Supposons que l'entier n est impair. Alors, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. Considérons un tel k . On a :

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k).$$

Puisque $k^2 + k$ est un entier, $4(k^2 + k)$ est divisible par 4 donc $n^2 - 1$ est divisible par 4. On a montré que :

Si l'entier n est impair, alors l'entier $n^2 - 1$ est divisible par 4.

3. La contraposée a la même valeur de vérité que l'implication de départ donc

l'assertion de départ est vraie.

Exercice 4 –

1. Équation (E_1).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |x-1| &= |3-x| \iff x-1=3-x \text{ Ou } x-1=x-3 \\ &\iff 2x=4 \text{ Ou } -1=-3 \\ &\iff x=2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\mathcal{S}_1 = \{2\}$.

2. Inéquation (E_2).

On procède par disjonction de cas.

- résolution sur $] -\infty; 1[$. Soit $x \in] -\infty; 1[$. On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff -x+1+3-x > 7 \iff -2x > 3 \iff x < -\frac{3}{2}$$

L'inéquation est donc vérifiée sur $\left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[$.

- résolution sur $[1; 3]$. Soit $x \in [1; 3]$. On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff x-1+3-x > 7 \iff 2 > 7$$

Ceci n'est pas possible donc l'inéquation n'est pas vérifiée sur $[1; 3]$.

- résolution sur $]3; +\infty[$. Soit $x \in]3; +\infty[$. On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff x-1+x-3 > 7 \iff 2x > 11 \iff x > \frac{11}{2}$$

Or, $\frac{11}{2} > 3$. Ainsi, l'inéquation est vérifiée sur $\left] \frac{11}{2}; +\infty \right[$.

- Bilan.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}_2 = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{11}{2}; +\infty \right[$.

3. Équation (E_3).

Le terme $\sqrt{2-x}$ est défini si et seulement si $2-x \geq 0$, donc si et seulement si $x \leq 2$.

Si x est un réel dans $] -\infty, -1[$, alors $\sqrt{2-x} > 0$ et $x+1 < 0$. Donc l'équation n'a pas de solution sur $] -\infty, -1[$.

Soit $x \in [-1; 2]$. Puisque $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} (E_3) &\iff (2-x = (x+1)^2) \\ &\iff 2-x = x^2 + 2x + 1 \\ &\iff x^2 + 3x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ Ou } x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Or, on a $\frac{-3-\sqrt{13}}{2} < \frac{-3}{2} < -1$ et $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$ d'où

$$0 = \frac{-3+3}{2} < \frac{-3+\sqrt{13}}{2} < \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S}_3 = \left\{ \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right\}$.

4. Les termes de l'équation (E_4) sont bien définis si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} \leq \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1+x-2x(x+1)}{x(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \times \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x(x+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

On construit le tableau de signes de l'expression de gauche :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$x^2 - \frac{1}{2}$		+	0	-	0	+
$x(x+1)$		+	0	-	0	+
$-2 \times \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x(x+1)}$	-		+	0	-	

On en conclut que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\mathcal{S}_4 =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[.$$

5. Les termes de l'équation (E_5) sont définis si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} &= \frac{5}{x^2-1} + 1 \Leftrightarrow 2(x+1) + 3(x-1) = 5 + (x^2-1) \\ &\Leftrightarrow 5x-1 = x^2+4 \\ &\Leftrightarrow x^2-5x+5=0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 5 > 0.$$

Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Ces deux réels sont différents de -1 et de 1 : ils appartiennent donc au domaine de définition de l'équation.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_5) est

$$S_5 = \left\{ \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

6. Équation (E_6) .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $x = n + t$, avec $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0, 1[$. Alors

$$\lfloor 2x \rfloor = 2n + \lfloor 2t \rfloor,$$

et $\lfloor 2t \rfloor$ vaut 0 si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, et 1 si $\frac{1}{2} \leq t < 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 &\iff 2n + \lfloor 2t \rfloor = n + 1 \\ &\iff n + \lfloor 2t \rfloor = 1. \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, alors $n = 1$, d'où $x \in [1; \frac{3}{2}[$.
- Si $\frac{1}{2} \leq t < 1$, alors $n = 0$, d'où $x \in [\frac{1}{2}; 1[$.

Réciproquement, tous les réels de ces deux intervalles vérifient bien l'équation. Ainsi,

$$S_6 = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[.$$

Exercice 5 – Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On procède par analyse-synthèse.

Analyse : On suppose que $f = g + h$ avec g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0, et h une fonction de la forme $x \mapsto ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + ae^x$.

En particulier, pour $x = 0$, et par hypothèse sur g , on a : $f(0) = a$.

Ainsi, h est la fonction $x \mapsto f(0)e^x$.

Et donc, g est la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)e^x$.

Synthèse : Posons $g : x \mapsto f(x) - f(0)e^x$ et $h : x \mapsto f(0)e^x$. g et h sont toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$. De plus,

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = f(x) - f(0)e^x + f(0)e^x = f(x)$.
- On a h qui est bien de la forme $h \mapsto ae^x$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.
- Enfin, $g(0) = f(0) - f(0)e^0 = 0$.

Par analyse-synthèse, on a bien montré l'existence et l'unicité de la décomposition.

Exercice 6 – On pose $A = \left\{ \frac{2x}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = [-1; 1]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$, on obtient

$$1 + x^2 \geq 2x \quad \text{et} \quad 1 + x^2 \geq -2x.$$

Puisque $1 + x^2 > 0$, il vient

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Ainsi, $A \subset B$.

2. Soit $y \in]-1; 1[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \iff yx^2 - 2x + y = 0.$$

Si $y = 0$, le choix $x = 0$ convient. Si $y \neq 0$, le discriminant du trinôme est

$$\Delta = (-2)^2 - 4y^2 = 4(1 - y^2) > 0.$$

On peut donc choisir $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$, qui est réel et vérifie l'équation. Ainsi, $] - 1; 1[\subset A$.

3. Pour $x = 1$, on obtient $\frac{2x}{1+x^2} = 1$; pour $x = -1$, on obtient $\frac{2x}{1+x^2} = -1$. Donc $\{-1, 1\} \subset A$. Avec la question 2, ceci montre que $B \subset A$. La question 1 donne l'inclusion réciproque. Finalement, $A = B = [-1; 1]$.

Exercice 7 –

1. Pour tous réels a et b , l'inégalité triangulaire s'écrit

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Les deux membres de l'égalité étudiée sont positifs; on peut donc les élever au carré :

$$\begin{aligned} |a + b| = |a| + |b| &\iff (a + b)^2 = (|a| + |b|)^2 \\ &\iff a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2|ab| + b^2 \\ &\iff ab = |ab| \\ &\iff ab \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $|a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$.

3. On remarque que

$$|x - 3| = |3 - x| \quad \text{et} \quad |(x - 1) + (3 - x)| = 2.$$

D'après la question précédente, cette égalité est vérifiée si et seulement si

$$(x - 1)(3 - x) \geq 0 \iff 1 \leq x \leq 3.$$

Ainsi, $\mathcal{S} = [1; 3]$.

Exercice 8 –

1. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété P_n : « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

Initialisation : $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $u_0 = 2^{0+2} - 3$ et donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé.

Supposons que la propriété P_n est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(2^{n+2} - 3) + 3 = 2^{n+3} - 6 + 3 = 2^{(n+1)+2} - 3$ donc la propriété P_{n+1} est vraie.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3$.

2. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier $n \geq 6$, on considère la propriété P_n : « $2^n \geq (n + 2)^2$ ».

Initialisation : $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$ donc $2^6 \geq (6+2)^2$ donc P_6 est vraie.

Hérédité : Soit un entier $n \geq 6$ fixé.

On suppose que P_n est vraie, à savoir $2^n \geq (n+2)^2$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+2)^2.$$

Or, $2(n+2)^2 - (n+3)^2 = 2(n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 6n + 9) = n^2 + 2n - 1$.

Les deux racines de ce trinôme sont $n_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $n_2 = -1 + \sqrt{2}$. Ces deux racines sont inférieures à 6 et le coefficient dominant du polynôme est positif, donc $n^2 + 2n - 1 \geq 0$.

On obtient ainsi $2(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$ et donc $2(n+2)^2 \geq (n+3)^2$.

Finalement,

$$2^{n+1} \geq 2(n+2)^2 \geq ((n+1)+2)^2$$

et P_{n+1} est vraie.

Par récurrence : $\forall n \geq 6, 2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 9 – Raisonnons par récurrence double.

Pour tout entier naturel n , on note P_n la propriété : $u_n = 1 - (-2)^n$

- **Initialisation :** $u_0 = 0$ et $1 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$ donc la propriété P_0 est vraie.

$u_1 = 3$ et $1 - (-2)^1 = 1 - (-2) = 3$ donc la propriété P_1 est vraie.

- **Hérédité :** soit n un entier naturel fixé. On suppose que les propriétés P_n et P_{n+1} sont vraies c'est-à-dire $u_n = 1 - (-2)^n$ et $u_{n+1} = 1 - (-2)^{n+1}$. Montrons que P_{n+2} est vraie.

Par définition, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -(1 - (-2)^{n+1}) + 2(1 - (-2)^n) \\ &= -1 + (-2)^{n+1} + 2 - 2 \times (-2)^n \\ &= 1 + (-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ &= 1 + 2(-2)^{n+1} \\ &= 1 - (-2)(-2)^{n+1} \\ &= 1 - (-2)^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui signifie que la propriété P_{n+2} est vraie.

Par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (-2)^n$

Exercice 10 –

- (a) Soient x et y des réels. Alors, $f_1(x) = x$ et $f_1(y) = y$, donc

$$|f_1(x) + f_1(y)| = |x + y|.$$

Donc f_1 vérifie bien (E).

- (b) Soient x et y des réels. Alors, $f_2(x) = -x$ et $f_2(y) = -y$, donc

$$|f_2(x) + f_2(y)| = |-x - y| = |-(x + y)| = |x + y|.$$

Donc f_2 vérifie bien (E).

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$|f(x)| = |x| \iff (f(x) = x \text{ OU } f(x) = -x).$$

D'où, $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x])}$.

3. (a) Pour $x = 0$ et $y = 0$, on obtient :

$$|f(0) + f(0)| = |0 + 0|$$

$$|2f(0)| = |0|$$

$$2|f(0)| = 0$$

Donc $\boxed{f(0) = 0}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $f(0) = 0$,

$$|f(x) + f(0)| = |x + 0|$$

$$|f(x) + 0| = |x|$$

$$|f(x)| = |x|$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$.

(c) i. La négation demandée est

$$\boxed{(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ Et } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x)}.$$

ii. Comme f vérifie $(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|)$ (question 3.b), en utilisant la question 2, on en déduit que f vérifie $(\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x])$

Supposons que $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ Et } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x)$.

On note x un réel tel que $f(x) \neq x$ et y un réel tel que $f(y) \neq -y$.

Comme $f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x$ et $f(x) \neq x$, on obtient que $f(x) = -x$.

De même, $f(y) = y \text{ Ou } f(y) = -y$ et $f(y) \neq -y$, donc $f(y) = y$.

Comme f vérifie (E), on a $|f(x) + f(y)| = |x + y|$. Donc $|-x + y| = |x + y|$. Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés.

- Si $-x + y = x + y$, alors $-x = x$ donc $x = 0$. Donc $f(0) = 0$ (par quest. 3.a). Or $f(x) \neq x$, donc ceci fournit une contradiction.

- Si $-x + y = -(x + y)$, alors $y = -y$ donc $y = 0$. Donc $f(0) = 0$ (par quest. 3.a). Or $f(y) \neq -y$, donc ceci fournit une contradiction.

On en déduit que notre hypothèse est fausse, et donc que sa négation est vraie, c'est-à-dire que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

Autrement dit, $\boxed{f \text{ est forcément la fonction } f_1 \text{ ou la fonction } f_2}$.

4. On procède par analyse synthèse.

La question 3 réalise l'analyse et montre que les fonctions f_1 et f_2 sont les seules fonctions candidates à vérifier (E).

La synthèse a été réalisée dans la question 1, où l'on a montré que f_1 et f_2 vérifient (E).

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions vérifiant (E) est } \{f_1, f_2\}}$.