

DEVOIR SURVEILLÉ 1**Durée : 3h**

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 2 pages, est constitué de 10 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

1. Simplifier au maximum les expressions suivants :

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$
- $B = \frac{(x^3)^5 \times x^2}{x^2 \times x^{-5}}$ pour $x \neq 0$
- $C = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Exercice 2 – Pour chacune des assertions qui suivent :

1. Écrire la négation.
2. Déterminer si l'assertion est vraie ou fausse. Si l'assertion est vraie, on en fera la démonstration. Si l'assertion est fausse, on démontrera que la négation est vraie.

$$A : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y < x + 1. \gg$$

$$B : \ll \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 = y^3. \gg$$

$$C : \ll \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y > x \implies y^2 < x^2). \gg$$

$$D : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \text{ OU } x < e^y). \gg$$

Exercice 3 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'assertion suivante :

« Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors l'entier n est pair. »

1. Écrire la contraposée de cette assertion.
2. Montrer que cette contraposée est vraie.
3. Que conclure quant à la valeur de vérité de l'assertion de départ?
(expliquer sommairement)

Exercice 4 – Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

$$\begin{array}{ll} (E_1) & |x-1| = |3-x| \\ (E_2) & |x-1| + |3-x| > 7 \\ (E_3) & \sqrt{2-x} = x+1 \\ (E_4) & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leq 2. \\ (E_5) & \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{5}{x^2-1} + 1 \\ (E_6) & [2x] = [x] + 1 \end{array}$$

Exercice 5 – Montrer que toute fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = g + h$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0 et h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel a tel que pour tout x réel, $h(x) = a \exp(x)$.

Exercice 6 – On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{2x}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad B = [-1, 1].$$

1. Montrer que $A \subset B$.
2. Soit $y \in]-1, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{2x}{1+x^2}$.
3. Montrer que $A = B$.

Exercice 7 – Soient a et b deux nombres réels.

1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.
2. Montrer que : $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$.
3. En déduire l'ensemble des réels x vérifiant $|x-1| + |x-3| = 2$.

Exercice 8 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+2} - 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 6$, on a $2^n \geq (n+2)^2$.

Exercice 9 – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$.

Exercice 10 – Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y)| = |x + y|. \quad (E)$$

1. (a) On définit $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$. Montrer que f_1 vérifie (E).

- (b) On définit $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$. Montrer que f_2 vérifie (E).

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x]).$$

3. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

- (a) Montrer que $f(0) = 0$.

- (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$.

- (c) i. Écrire la négation de

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

- ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

4. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.