

## COLLES – QUINZAINE 1

**Exercice 1** (Question de cours) – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ . Démontrer par une récurrence double que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$ .

**Exercice 2** (Question de cours) – Montrer que toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**Exercice 3** (Question de cours) – Montrer que  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} ]-\infty, k] = \mathbb{R}$ .

**Exercice 4** (Question de cours) – Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2}$  est un entier naturel.

**Exercice 5** (Question de cours) – Montrer que pour tout réel  $x > 0, 0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Exercice 6** – Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x - y = 1\}$  et  $C = \{(t+1, 4t+3); t \in \mathbb{R}\}$ . Démontrer que  $A = C$ .

**Exercice 7** – Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  trois éléments de  $\mathcal{P}(E)$ .

1. Démontrer que, si  $A \cap B = A \cup B$ , alors  $A = B$ .
2. Démontrer que, si  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ , alors  $B = C$ . Une seule des deux conditions suffit-elle?

**Exercice 8** – Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ . On appelle fonction caractéristique de  $A$  l'application  $f$  de  $E$  dans l'ensemble à deux éléments  $\{0, 1\}$  telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $f$  et  $g$  leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1.  $1 - f$ ;
2.  $fg$ ;
3.  $f + g - fg$ .

**Exercice 9** – Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Démontrer que  $D$  ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 10** – Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

1. Montrer que

$$a + b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ Ou } b \notin \mathbb{Q}.$$

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie quels que soient  $a$  et  $b$ ?

**Exercice 11** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}.$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n, u_n = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$ .

**Exercice 12** – On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 6 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

**Exercice 13** – Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**Exercice 14** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par

$$u_0 = 2; \quad u_1 = 3; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer quelques termes de cette suite, émettre une conjecture sur le terme général de cette suite.
2. Démontrer cette conjecture.

**Exercice 15** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1.$$

Montrer que cette suite est strictement croissante

**Exercice 16** – Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 17** – L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x.$$

1. Soit  $f$  une fonction vérifiant (E). Que vaut  $f(0)$ ?  $f(1)$ ?
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En appliquant (E) en  $1-x$ , déterminer  $f(x)$ .
3. Conclure.