

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 9

Exercice 1 –

1. Donner la définition de suite convergente.

Solution : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

2. Donner la définition de suites adjacentes.

Solution : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- l'une est croissante, l'autre est décroissante;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

3. Énoncer le théorème de convergence monotone.

Solution : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge.

Exercice 2 –

1. Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

$$u_n = n \cos(n) + n^2, \quad v_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n.$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $-1 \leq \cos(n)$ donc, $-n \leq n \cos(n)$ donc $n^2 - n \leq u_n$. Or, $n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$. Ainsi, par théorème de minoration, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2}.$$

2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\lfloor \pi^k \rfloor}{4^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Solution : Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\lfloor \pi^{n+1} \rfloor}{4^{n+1}} > 0$$

Donc, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Par ailleurs,

$$S_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{\pi^k}{4^k} \leq \frac{1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\pi}{4}} \leq \frac{1}{1 - \frac{\pi}{4}}$$

Ainsi, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.