

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 8

Exercice 1 –

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.

Solution : Soient a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2. Rappeler l'énoncé de la propriété de la borne supérieure.

Solution : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie.

Exercice 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx} = 2^n e^{nx} \cosh^n(x)$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2x})^k 1^{n-k} = (1 + e^{2x})^n = \left(e^x (e^x + e^{-x}) \right)^n = 2^n e^{nx} \cosh^n(x)$$

2. (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^3(\theta) = \frac{3}{4} \sin(\theta) - \frac{1}{4} \sin(3\theta)$.

Solution : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On linéarise le sinus :

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{3^{n+1}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de la question précédente et en reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^k}\right) &= \sum_{k=1}^n 3^k \left(\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(3^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - 3^k \sin\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - 3 \sin(\pi) \right) \\ &= \frac{3^{n+1}}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \end{aligned}$$

3. Donner, sans justification, la borne supérieure et la borne inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ x + \frac{1}{x} ; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned} \sup(A) &= \frac{1}{2} & \text{et} & & \inf(A) &= -1 \\ \sup(B) &= +\infty & \text{et} & & \inf(B) &= 2 \end{aligned}$$