

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 7

Exercice 1 –

1. Soient a et b dans $\mathbb{Z}$. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[[a; b]]$?

Solution : Il y a $b - a + 1$ entiers dans l'intervalle $[[a; b]]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^n k$

Solution : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b) $\sum_{k=0}^n k^2$

Solution : $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(c) $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Solution : Si $q \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^n (5k - 1)$

Solution :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n (5k - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^n 5k + \sum_{k=0}^n (-1) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= 5 \left(\sum_{k=0}^n k \right) - \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 5 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= (n+1) \left(\frac{5n}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$2. T_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k+1}}{2^k}$$

Solution :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^n \frac{3 \times 3^k}{2^k} \\ &= 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= 3 \times \left(-\frac{2}{1}\right) \times \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= -6 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

$$3. U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k^2 + 3k - 5}{k-1} \quad (\text{indication : on pourra procéder au changement d'indice } j = k - 1).$$

Solution :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k^2 + 3k - 5}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{2(j+1)^2 + 3(j+1) - 5}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{2(j^2 + 2j + 1) + 3j + 3 - 5}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{2j^2 + 7j}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n (2j + 7) \\ &= 2 \sum_{j=0}^n j + \sum_{j=0}^n 7 \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} + 7(n+1) \\ &= (n+1)(n+7) \end{aligned}$$