

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 6

Exercice 1 – Indiquer sur quels intervalles les fonctions arccos, arcsin et arctan sont définies, puis sur quels intervalles elles sont dérivables et enfin donner la formule donnant les dérivées de ces fonctions sur leurs intervalles de dérivabilité.

Solution :

- La fonction arccos est définie sur l'intervalle $[-1; 1]$, elle est dérivable sur $] - 1; 1[$ et pour tout $x \in] - 1; 1[$, on a :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- La fonction arcsin est définie sur l'intervalle $[-1; 1]$, elle est dérivable sur $] - 1; 1[$ et pour tout $x \in] - 1; 1[$, on a :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

•

- La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 2 –

1. On définit l'application : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+1}{-5x+3} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Solution : Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{5} \right\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ et déterminons-la. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2x+1}{-5x+3} = y \iff 2x+1 = y(-5x+3) \\ &\iff x(2+5y) = 3y-1 \iff x = \frac{3y-1}{2+5y} \text{ car } 2+5y \neq 0 \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \frac{3}{5}$. On a alors $\frac{3y-1}{2+5y} = \frac{3}{5}$ donc $5(3y-1) = 3(2+5y)$, d'où $-5 = 6$. Absurde.

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{5} \right\}$ admet bien un unique antécédent.

On en conclut que f est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie

de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{5}\right\}$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2+5x}.$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Solution : Posons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

On a donc bien montré que pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$