

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 5

Exercice 1 –

1. Rappeler les propriétés algébriques de l'exponentielle et du logarithme ($\ln(a \times b) = \dots$, $e^{a+b} = \dots$).

Solution : Soient $a > 0$ et $b > 0$, et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b), \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \ln(a^n) = n \ln(a), \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}, e^{na} = (e^a)^n$$

2. Rappeler les résultats de croissance comparée.

Solution : Soient a et $b > 0$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^b x^a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^a e^{bx} = 0$$

Exercice 2 –

1. Simplifier les deux expressions suivantes :

$$A = \ln((3x-1)^2) - \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) + \ln(\sqrt{3x-1}) - \ln\left(\frac{(3x-1)(x^2+1)}{2}\right)$$

$$B = \frac{e^{x^2+1} \times (e^{2x})^2}{e^{\ln(x)-x^2+4} \times e}$$

Solution :

$$\begin{aligned} A &= 2 \ln(3x-1) - \ln(3x-1) + \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3x-1) - \ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + \ln(2) \\ &= \frac{1}{2} \ln(3x-1) - \ln(x^2+1) + 2 \ln(2) \end{aligned}$$

$$B = \frac{e^{x^2+1+4x}}{x e^{-x^2+4+1}} = \frac{e^{x^2+4x+1+x^2-5}}{x} = \frac{e^{2x^2+4x-4}}{x}$$

2. Étudier et tracer sur son ensemble de définition la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Solution : La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0 uniquement. Donc, par quotient, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

Or, pour tout $x > 0$, on a $1 - 2\ln(x) \geq 0 \iff 2\ln(x) \leq 1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \leq \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$, par croissance de la fonction exponentielle.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0^+$ par croissance comparée. Enfin,

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}^2} = \frac{1}{2e}.$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1 - 2\ln(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0^+

On obtient l'allure de courbe suivante :

