

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 4

Exercice 1 –

1. Soit n un entier naturel non nul. Donner la forme des racines n -ièmes de l'unité. Comment note-t-on l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité?

Solution : On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. On a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}; k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\pi/n}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$$

2. Rappeler les formules d'Euler.

Solution : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exercice 2 –

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$$

Solution : On calcule le discriminant : $\Delta = (5 - 14i)^2 + 4(24 + 10i) = 25 - 196 - 140i + 96 + 40i = -75 - 100i = 25(-3 - 4i)$.

Cherchons les racines carrées complexes de $-3 - 4i$. Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$. On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2ab = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \mp 2 \end{cases}$$

Ainsi, les racines carrées complexes de Δ sont $5(1 - 2i) = 5 - 10i$ et $-5 + 10i$.

L'équation admet donc deux solutions qui sont :

$$z_1 = \frac{5 - 14i + 5 - 10i}{2} = 5 - 12i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 - 14i - 5 + 10i}{2} = -2i$$

2. Déterminer les racines quatrièmes de $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

Solution : On commence par mettre $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ sous forme exponentielle :

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4e^{i\pi/4} = \sqrt{2}^4 e^{i\pi/4}$$

Une racine quatrième de $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ est donnée par

$$\sqrt{2}e^{i\pi/16}$$

Les racines quatrième de $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ sont donc données par

$$\sqrt{2}e^{i\pi/16}; \sqrt{2}e^{i\pi/16}e^{i\pi/2}; \sqrt{2}e^{i\pi/16}e^{i\pi}; \sqrt{2}e^{i\pi/16}e^{3i\pi/2}$$

Autrement dit,

$$\sqrt{2}e^{i\pi/16}; \sqrt{2}e^{9i\pi/16}; \sqrt{2}e^{17i\pi/16}; \sqrt{2}e^{25i\pi/16}$$

3. Déterminer le lieu géométrique des points dont l'affixe z vérifie $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$.

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point d'affixe z . Alors, on a $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$ si et seulement si, la distance du point M au point d'affixe $1 - i$ est constante égale à $\sqrt{2}$. Ainsi, $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$ si et seulement si, M est sur le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.