INTERRO DE COURS – NUMÉRO 3

Exercice 1 –

1. Rappeler les formules d'addition du sinus et du cosinus.

Solution : Pour tous a et $b \in \mathbb{R}$:

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les quantités suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \sin(\pi + x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad \cos(\pi - x)$$

Solution : On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

Exercice 2 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = -\cos(x)$

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) = -\cos(x) &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \underbrace{0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Impossible}} \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

2. $\cos(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ Ou } 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ avec} k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \text{ Ou } x = \frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}, \text{ avec} k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \in \left\{-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. $\cos x = \sqrt{3}\sin(x) + 1$

Solution : Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour ce type d'équations, la méthode est toujours la même. On commence par la transformer en

$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$$

On factorise ensuite par $\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$. L'équation est équivalente à

$$\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2}.$$

On remarque ensuite que $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. L'équation s'écrit donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{1}{2}$$

D'après une formule de trigonométrie, elle est encore équivalente à

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Les solutions de cette équation sont les réels x pour lesquels

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$