INTERRO DE COURS – NUMÉRO 2

Exercice 1 –

1. Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.

Solution : Pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, on a $\left|x+y\right| \leqslant |x|+|y|$.

2. Soient a, b et c des réels. Donner la forme des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ en fonction du signe du discriminant (dont on rappellera la définition). On donnera également la factorisation de ax^2+bx+c dans les différents cas.

Solution : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on a la factorisation $ax^2+bx+c = 0 = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exercice 2 –

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2-4} = 2x-4$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, l'équation n'est bien définie que si $x^2-4 \geqslant 0$, i.e $x \in]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$. De plus, cette équation n'admet une solution que si $2x-4 \geqslant 0$, i.e $x \in [2; +\infty[$.
Soit donc $x \in [2; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4} = 2x-4 &\iff x^2-4 = (2x-4)^2 \qquad \text{(car les deux termes sont positifs)} \\ &\iff x^2-4 = 4x^2-16x+16 \\ &\iff 3x^2-16x+20 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 256-240 = 16$. Il y a donc deux solution qui sont $x_1 = \dfrac{16-4}{6} = 2$ et $x_2 = \dfrac{16+4}{6} = \dfrac{10}{3}$. Ces deux solutions sont bien dans l'intervalle $[2; +\infty$ donc

$$\boxed{S = \left\{2; \frac{10}{3}\right\}}$$

2. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{x}{x-3}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} < \frac{x}{x-3} &\iff \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-3} < 0 \\
&\iff \frac{x-3-x(x+1)}{(x+1)(x-3)} < 0 \\
&\iff \frac{-x^2-3}{(x+1)(x-3)} < 0
\end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2-3$		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-x^2-3}{(x+1)(x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

D'où,

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[}$$