

**INTERRO DE COURS – NUMÉRO 28**

**Exercice 1 –**

1. Enoncer la formule de König-Huygens.

**Solution :** Soit  $X$  une variable aléatoire (finie). On a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

2. Compléter le tableau ci-dessous

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
<b>Uniforme :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$				
<b>Bernoulli :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$				
<b>Binomiale :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$				

**Solution :**

Loi	Support	Probabilités	Espérance	Variance
<b>Uniforme :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$	$\llbracket 1; n \rrbracket$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
<b>Bernoulli :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$\{0; 1\}$	$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$	$p$	$p(1 - p)$
<b>Binomiale :</b> $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0; n \rrbracket$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$

**Exercice 2 –** On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne gagne ni ne perd d’argent. On note  $X$  le gain (algébrique) en euros à l’issue d’un tirage.

1. Déterminer le support et la loi de  $X$ .

**Solution :** On a  $X(\Omega) = \{-3; -1; 0; 3\}$ . De plus,

$$P(X = -3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad P(X = -1) = \frac{7}{20}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{20}, \quad P(X = 3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Ce que l’on peut résumer dans le tableau suivant :

$x$	-3	-1	0	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

2. Déterminer l’espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

**Solution :** On a  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$  ainsi

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{5} + -1 \times \frac{7}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{-1}{20}.$$

D'après la formule de König-Huygens, on a  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . Or

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{7}{20} + 0^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{3}{10} = \frac{97}{20}.$$

On en déduit  $V(X) = \frac{97}{20} - \left(-\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{97}{20} - \frac{1}{400} = \frac{1939}{400}$

3. On note  $Y = 4X - 1$ . Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $Y$ .

**Solution :** D'après la linéarité de l'espérance, on a  $E(Y) = 4E(X) - 1 = -\frac{4}{20} - 1 = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$ .

D'après les propriétés sur la variance, on a  $V(Y) = 16V(X) = 16 \times \frac{1939}{400} = 4 \times \frac{1939}{100} = \frac{1939}{25}$ .

4. On note  $Z = X^2$ .

(a) Déterminer le support de  $Z$ .

**Solution :** Les valeurs prises par  $Z$  sont obtenues en calculant les images des valeurs prises par  $X$  par l'application  $h(x) = x^2$ . Ainsi on a :  $h(-3) = 9$ ,  $g(-1) = 1$ ,  $g(0) = 0$  et  $g(3) = 9$ .

En conclusion, on a :  $Z(\Omega) = \{0, 1, 9\}$ .

(b) Déterminer la loi de  $Z$ .

**Solution :** On a :

- $P(Z = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{3}{20}$

- On a :

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X^2 = 1) \\ &= P([X = 1] \cup [X = -1]) \\ &= P(X = 1) + P(X = -1) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\ &= 0 + \frac{7}{20} \\ &= \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}P(Z = 9) &= P(X^2 = 9) \\&= P([X = 3] \cup [X = -3]) \\&= P(X = 3) + P(X = -3) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\&= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\&= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien  $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 9) = 1$ .