INTERRO DE COURS – NUMÉRO 27

Exercice 1 –

1. Énoncer le critère de comparaison des séries à termes positifs.

> **Solution :** Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles positives telles que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. Alors,
> - Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.
> - Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.
> - Dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

2. Donner la définition des séries de Riemann et le critère de convergence associé.

> **Solution :** Une série de Riemann est une série dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Déterminer la matrice relative aux applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (2x-y+z, -2x+3z) \end{cases}$

> **Solution :** La matrice canoniquement associée à f est :
>
> $$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P'(X) \end{cases}$

> **Solution :** La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $(1, x, x^2)$. On a :
>
> $$f(1) = 1 - 0 = 1, \quad f(x) = x + 1 - 1 = x \quad f(x^2) = (x+1)^2 - 2x = x^2 + 1.$$
>
> Ainsi la matrice canoniquement associée à f est :
>
> $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ x+z \\ x-y+2z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. (Aucune justification n'est attendue).

Solution : La matrice A vaut : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_3$.

Solution : On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule alors $3A - 2I_3$ et on obtient l'égalité voulue.

3. A l'aide de la relation ci-dessus, montrer que f est un isomorphisme et déterminer sa bijection réciproque.

Solution : A l'aide de la relation précédente, nous pouvons montrer que la matrice A est inversible. En effet,

$$A^2 = 3A - 2I_3 \iff A(A-3I_3) = -2I_3 \iff A \times \frac{-1}{2}(A-3I_3) = I_3$$

Ainsi la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A-3I_3) = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que l'endomorphisme f est bijectif et que sa bijection réciproque vaut $f^{-1} = -\frac{1}{2}f + \frac{3}{2}I_d$. Soit l'expression suivante :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+3y-z \\ -x+y+z \end{pmatrix}.$$