

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 26

Exercice 1 –

1. Donner la définition de projecteur, la propriété caractéristique des projecteurs et la propriété donnant les espaces caractéristiques d'un projecteur en fonction du noyau de certaines applications.

Solution : Soit E un espace vectoriel, F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application définie par :

$$\begin{aligned} p &: E = F \oplus G \longrightarrow F \\ x = f + g &\longmapsto f \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$f \text{ est un projecteur} \iff f \circ f = f$$

Si f est un projecteur, en reprenant les notations ci-dessus, on a :

$$F = \text{Ker}(f - \text{Id}) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(f)$$

2. Donner la définition de forme linéaire et d'hyperplan.

Solution : Une forme linéaire est une application linéaire φ à valeurs dans le corps \mathbb{K} de base de l'espace vectoriel sur lequel est définie. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 2 – Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x, y, z)) = \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2} \right).$$

1. Montrer que f est un projecteur.

Solution : L'énoncé nous indique déjà que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , il reste donc à montrer que $f \circ f = f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f\left(\left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x+y+z}{2} + y + \frac{x-y+z}{2}}{2}, y, \frac{\frac{x+y+z}{2} + y + \frac{x-y+z}{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right) \\ &= f((x, y, z)). \end{aligned}$$

L'endomorphisme f est donc bien un projecteur de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer ses caractéristiques.

Solution : Commençons par déterminer $\text{Ker}(f)$, soit $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$, on a $f((x, y, z)) = (0, 0, 0)$. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

soit $y = 0$ et $x = -z$. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 0, 1)).$$

Déterminons ensuite $\text{Im}(f)$, la famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice car c'est la base canonique de \mathbb{R}^3 , ainsi :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) = \text{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right) = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, -1))$$

L'endomorphisme f est donc un projecteur sur $\text{Vect}((1, 0, 1), (1, 2, -1))$ parallèlement à $\text{Vect}((-1, 0, 1))$.

Exercice 3 – Montrer que $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$ est un hyperplan de \mathbb{R}^4 et donner sa dimension.

Solution : Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y, z, t) \longmapsto x + 2y - 3z + 4t$$

φ est clairement une forme linéaire, non nulle, dont $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z + 4t = 0\}$ est le noyau. Donc il s'agit bien d'un hyperplan de \mathbb{R}^4 qui est donc de dimension 3.