

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 25

Exercice 1 –

1. Donner la définition de noyau et d'image d'une application linéaire.

Solution : Soient E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit le noyau et l'image de f , notés respectivement $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ par

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{x \in E, f(x) = 0_F\} \\ \text{Im}(f) &= \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}\end{aligned}$$

2. Énoncer le théorème du rang (sous sa forme usuelle).

Solution : Soient E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Exercice 2 – Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Donner une base et la dimension de leur noyau et de leur image. Vérifier le théorème du rang. Dire si les applications sont injectives, surjectives et/ou bijectives.

1. $f_1 : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Solution :

Linéarité. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f_1(\lambda X + Y) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) \\ \lambda x_2 + y_2 - (\lambda x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \lambda f_1(X) + f_1(Y).$$

Donc f_1 est linéaire.

Noyau. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On a

$$f_1(X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3.$$

Ainsi

$$\ker(f_1) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \ker(f_1) = 1.$$

Image. Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$f_1(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_1(E_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_1(E_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = M_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \dim \text{Im}(f_1) = 2.$$

Théorème du rang.

$$1 + 2 = 3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Conclusion. f_1 est surjective mais non injective, et non bijective.

$$2. \quad \begin{array}{ccc} f_2: \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) - 3P \end{array}$$

Solution :

Linéarité. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f_2(\lambda P + Q) = X(\lambda P' + Q') - 3(\lambda P + Q) = \lambda f_2(P) + f_2(Q).$$

Noyau. Soit $P(X) = a + bX + cX^2$. Alors

$$f_2(P) = -3a - 2bX - cX^2.$$

Ainsi $f_2(P) = 0 \iff a = b = c = 0$, donc

$$\ker(f_2) = \{0\}, \quad \dim \ker(f_2) = 0.$$

Image. Dans la base canonique $(1, X, X^2)$,

$$f_2(1) = -3, \quad f_2(X) = -2X, \quad f_2(X^2) = -X^2.$$

Donc

$$\text{Im}(f_2) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X], \quad \dim \text{Im}(f_2) = 3.$$

Théorème du rang.

$$0 + 3 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X].$$

Conclusion. f_2 est bijective.