

## INTERRO DE COURS – NUMÉRO 24

### Exercice 1 –

1. Énoncer le théorème de Heine.

**Solution :** Une fonction continue sur un segment (intervalle fermé borné  $[a, b]$ ) est uniformément continue.

2. Donner la formule de Taylor avec reste intégral.

**Solution :** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

### Exercice 2 –

1. Justifier que l'intégrale  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$  est bien définie.

**Solution :** La fonction  $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$  est continue sur  $]0, \pi]$ . De plus,  $\frac{\sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$  au voisinage de 0. Donc,  $f$  est prolongeable par continuité en 0. Donc, l'intégrale est bien définie.

2. Justifier que la fonction  $\varphi : x \mapsto \int_x^{e^x} \cos(t^2) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

**Solution :** Notons  $F : x \mapsto \int_0^x \cos(t^2) dt$ . La fonction  $t \mapsto \cos(t^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc d'après le théorème fondamental de l'analyse,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\varphi(x) = F(e^x) - F(x)$ . Donc,  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x F'(e^x) - F'(x) = e^x \cos(e^{2x}) - \cos(x^2)$$

3. Justifier que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et calculer sa limite.

**Solution :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}$$

On reconnaît une somme de Riemann. La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$  est continue sur

$[0, 1]$  donc la suite converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[ \frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

4. Soit  $a > 0$ . Démontrer que

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

**Solution :** On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction  $\cos$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et toutes ses dérivées sont majorés par 1. On obtient alors exactement l'inégalité demandée.