INTERRO DE COURS – NUMÉRO 23

Exercice 1 – Énoncer la formule des probabilités totales ainsi que la formule des probabilités composées.

Solution :
Formule des probabilités composées : Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales : Soit B un évènement et $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'évènements. On a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$$

De plus, si les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont de probabilités non nulles, alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

Exercice 2 – On considère une urne contenant 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne. Calculer la probabilité que la troisième boule soit verte.

Solution : D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V_3) &= P(R_1 \cap R_2 \cap V_3) + P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap R_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{35} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35} \\ &= \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Exercice 3 – John et Bob jouent à un jeu de société dans lequel il n'y a pas d'égalité. Les deux joueurs ont la même probabilité de gagner la première partie.
En revanche, si John gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $0,7$, et s'il perd, la probabilité qu'il perde la suivante est $0,9$.
Pour tout entier naturel n, on note G_n l'évènement « John gagne la n-ième partie », et $p_n = P(G_n)$. Ainsi, $p_1 = \frac{1}{2}$.

1. À l'aide de l'énoncé, donner les valeurs de $P_{G_n}(G_{n+1})$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$.

Solution : D'après l'énoncé, on a :

$$P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7 \qquad \text{et } P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = 0,1$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,1$$

Solution : D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n})P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= 0,7P(G_n) + 0,1P(\overline{G_n}) \\ &= 0,7P(G_n) + 0,1(1 - P(G_n) \\ &= 0,7P(G_n) + 0,1 - 0,1P(G_n) \\ &= 0,6P(G_n) + 0,1 \end{aligned}$$

Autrement dit, on a bien :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,1$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = p_n - 0,25$.
Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,6$. Donner également son premier terme v_1.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0,25 \\ &= 0,6p_n + 0,1 - 0,25 \\ &= 0,6(p_n + 0,25) + 0,1 - 0,25 \\ &= 0,6p_n + 0,15 - 0,15 \\ &= 0,6p_n \end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,6$. De plus, le premier terme v_1 vaut

$$v_1 = p_1 - 0,25 = 0,5 - 0,25 = 0,25$$

4. Exprimer v_n en fonction de n, puis p_n en fonction de n.

Solution : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,6$ et de premier terme $v_1 = 0,25$ donc

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,25 \times 0,6^{n-1}$$

On en déduit l'expression de p_n en fonction de n :

$$p_n = v_n + 0,25 = 0,25 \times 0,6^{n-1} + 0,25$$