# INTERRO DE COURS – NUMÉRO 20

**Exercice 1 –** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

**Solution :**
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

2. $x \mapsto \mathrm{e}^x$

**Solution :**
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

3. $x \mapsto \ln(1+x)$

**Solution :**
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

4. $x \mapsto (1+x)^\alpha$

**Solution :**
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} \\ + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\frac{x^4}{4!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)\frac{x^5}{5!} + o(x^5)\end{aligned}$$

5. $x \mapsto \sin(x)$

**Solution :**
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

6. $x \mapsto \cos(x)$

**Solution :**
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

**Exercice 2 –** Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{5+6x}$

**Solution :**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5+6x} &\underset{0}{=} \frac{1}{5\left(1+\frac{6x}{5}\right)}\\
&= \frac{1}{5}\left(1-\frac{6x}{5}+\left(\frac{6x}{5}\right)^2-\left(\frac{6x}{5}\right)^3+o(x^3)\right) \text{ car } \lim_{x\to 0}\frac{6x}{5}=0\\
&= \frac{1}{5}\left(1-\frac{6x}{5}+\frac{36x^2}{25}-\frac{216x^3}{125}+o(x^3)\right)\\
&= \frac{1}{5}-\frac{6x}{25}+\frac{36x^2}{125}-\frac{216x^3}{625}+o(x^3)
\end{aligned}$$

2. $x\mapsto\sqrt{1+3x}$

**Solution :**

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+3x} &\underset{0}{=} (1+3x)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \lim_{x\to 0}3x=0\\
&= 1+\frac{1}{2}\times 3x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)\\
&= 1+\frac{3x}{2}-\frac{9x^2}{8}-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{9x^3}{2}+o(x^3)\\
&= 1+\frac{3x}{2}-\frac{9x^2}{8}+\frac{27x^3}{16}+o(x^3)
\end{aligned}$$

3. $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

**Solution :**

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{0}{=} \ln(1+x)\times\frac{1}{1+x}\\
&= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\times\left(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\right)\\
&= x-x^2+x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= x-\frac{3x^2}{2}+\frac{11x^3}{6}+o(x^3)
\end{aligned}$$

**Exercice 3 –** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$$

**Solution :** Calculons un développement limité à l'ordre 3 du numérateur pour en trouver un équivalent, on a, au voisinage de 0 :

$$\sin(x)-x\cos(x)=x-\frac{x^3}{3!}-x(1-\frac{x^2}{2!})+o(x^3)=x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Ainsi au voisinage de 0 :

$$\sin(x)-x\cos(x)\sim\frac{x^3}{3}$$

De plus, au voisinage de 0 : $1-\cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ donc

$$x(1-\cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$$

Par quotient, on a :

$$\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \dfrac{2}{3}$.