INTERRO DE COURS – NUMÉRO 1

Exercice 1 – Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Énoncer les lois de Morgan concernant le complémentaire de l'union et de l'intersection de A et B.

Solution : On a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 2 –

1. Donner la contraposée de l'implication suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left[x < 1 \Longrightarrow \ln(x) < 0\right]$$

Solution : La contraposée de l'implication ci-dessus est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left[\ln(x) \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 1\right]$$

2. La conjecture de Goldbach énonce que tout entier pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers. Écrire cette conjecture à l'aide de quantificateurs. *On pourra noter* $2\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers pairs, et* $\mathbb{P}$ *l'ensemble des nombres premiers.*

Solution : La conjecture de Goldbach s'énonce avec des quantificateurs de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;2\}, \quad \exists (p_1, p_2) \in \mathbb{P}^2 / \quad n = p_1 + p_2$

3. On considère les ensembles :

$$T = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 \leqslant 0\} \text{ et } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}.$$

Montrer que $T \subsetneq S$.

Solution : On peut remarquer que $T = [2;3]$ et $S = [2;+\infty[$. Donc, on a bien $T \subsetneq S$.

4. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right] = \{0\}$.

Solution : On procède par double inclusion.

- $\displaystyle\{0\} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right]$: il est clair que $0 \in \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
  donc $\displaystyle\{0\} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right]$.
- $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right] \subset \{0\}$: soit $\displaystyle x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-1}{k}; \frac{1}{k}\right]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant \frac{1}{k}$$

  Par passage à la limite quand $k \longrightarrow +\infty$, on en déduit, par encadrement, $x = 0$.
  Ce qui montre la deuxième inclusion.