

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 19

Exercice 1 –

1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que g ne s'annule pas. Donner les définitions (et les notations associées) de :

- « f est négligeable devant g au voisinage de a »;
- « f est dominée par g au voisinage de a »;
- « f et g sont équivalentes au voisinage de a ».

Solution : On a :

- « f est négligeable devant g au voisinage de a » ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$ et on note $f(x) = o(g(x))$;
- « f est dominée par g au voisinage de a » ssi $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ;
- « f et g sont équivalentes au voisinage de a » ssi $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow a$ et on note $f(x) \sim g(x)$.

2. Compléter les équivalents suivants :

$$\begin{array}{lll} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x & 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \end{array}$$

α étant une constante réelle **indépendante de x** .

Exercice 2 – 1. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction rationnelle $\frac{1}{X^4 - 1}$ et en déduire une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ de $x \mapsto \frac{1}{x^4 - 1}$.

Solution :

- La partie entière est nulle.
- On factorise le dénominateur :

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$

- On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}.$$

- On pose $P(X) = 1, Q(X) = X^4 - 1$ de sorte que $Q'(X) = 4X^3$ et

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{-1}{4}.$$

- Pour calculer c et d , on effectue d'abord la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et on regroupe les termes conjugués.
- Décomposons la fraction rationnelle sur \mathbb{C} .

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i).$$

On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{e}{X - i} + \frac{f}{X + i}.$$

On pose $P(X) = 1, Q(X) = X^4 - 1, Q'(X) = 4X^3$. On a déjà vu $a = 1/4, b = -1/4$ et on a

$$e = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{1}{4i^3} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

$$f = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = \frac{1}{4(-i)^3} = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{i/4}{X - i} - \frac{i/4}{X + i}.$$

- On termine en passant de \mathbb{C} à \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^4 - 1} &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{i/4}{X - i} - \frac{i/4}{X + i} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{i(X + i) - i(X - i)}{(X - i)(X + i)} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{X^2 + 1} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} - \frac{1/2}{X^2 + 1}. \end{aligned}$$

- Ainsi une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4 - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ est donnée par :

$$x \mapsto \frac{1}{4} \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \text{Arctan}(x)$$

2. Déterminer des équivalents simples au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes.

(a) $x^2 - \ln(x) + \frac{1}{e^x}$

Solution : $-\ln(x) = o(x^2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\frac{1}{e^x} = o(x^2)$. Ainsi

$$x^2 - \ln(x) + \frac{1}{e^x} \underset{+\infty}{\sim} x^2.$$

(b) $e^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1$

Solution : On a pour commencer $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^3}$ car $-x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $-1 \underset{+\infty}{=} o(2x^3)$.

En simplifiant, $\frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{2x^3-1} = 0$. On a donc :

$$e^{\frac{x^2-x}{2x^3-1}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2-x}{2x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$