

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 18

Exercice 1 –

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de racine de multiplicité k .

Solution : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que P est racine de multiplicité k de P si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

2. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. Donner la définition des polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$.

Solution : Les polynômes de Lagrange sont définis par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i(X) = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

Exercice 2 –

1. Décomposer en produits de polynômes irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P = 2X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 6X + 2$ sachant qu'il admet une racine double.

Solution : On remarque que $P(-1) = P'(-1) = 0$. Donc -1 est racine double. Donc, $(X+1)^2 \mid P$. Une division euclidienne nous donne :

$$P = 2(X+1)^2(X^2 + X + 1)$$

qui est la décomposition en produits de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le discriminant de $X^2 + X + 1$ est strictement négatif (égal à -3). Dans $\mathbb{C}[X]$, on trouve deux racines de $X^2 + X + 1$ qui sont $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, i.e j et j^2 . La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$P = 2(X+1)^2(X-j)(X-j^2)$$

2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 6$.

Solution : Par théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$X^n = (X^2 - 5X + 6)Q + aX + b$$

En évaluant en 2 et 3, on obtient :

$$\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$$

dont les solutions sont $a = 3^n - 2^n$ et $b = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$. Ainsi, le reste de la division euclidienne est :

$$(3^n - 2^n)X + 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$$