

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 17

Exercice 1 –

1. Donner l'énoncé du Lemme de Gauss.

Solution : Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid bc$ et si $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$.

2. Donner la formule de Taylor pour un polynôme.

Solution : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{\widetilde{P^{(k)}}(0)}{k!} X^k$$

Exercice 2 –

1. Calculer le PGCD de 12 et 67 puis déterminer des coefficients de Bézout associés.

Solution : On applique l'algorithme d'Euclide :

$$67 = 12 \times 5 + 7$$

$$12 = 7 \times 1 + 5$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Donc, $12 \wedge 67 = 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \times 2 = (12 - 7) - (7 - 5) \times 2 = 12 - 3 \times 7 + 2 \times 5 \\ &= 12 - 3 \times (67 - 12 \times 5) + 2 \times (12 - 7) = 18 \times 12 - 3 \times 67 - 2 \times 7 \\ &= 18 \times 12 - 3 \times 67 - 2 \times (67 - 12 \times 5) \\ &= 28 \times 12 - 5 \times 67 \end{aligned}$$

2. Soit P le polynôme $4X^4 - 20X^3 + 27X^2 - 30X + 9$. Montrer que P est le carré d'un polynôme Q de degré 2 à déterminer.

Solution : Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P = Q^2 &\iff 4X^4 - 20X^3 + 27X^2 - 30X + 9 = a^2X^4 + 2abX^3 + (2ac + b^2)X^2 + 2bcX + c^2 \\ &\iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ 2ab = -20 \\ 2ac + b^2 = 27 \\ 2bc = -30 \\ c^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \mp 5 \\ c = \pm 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $Q = \pm(2X^2 - 5X + 3)$.