

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 16

Exercice 1 – Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

1. Énoncer la formule du binôme de Newton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

2. Donner la définition de matrice inversible et de l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Solution : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 –

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a)

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

Solution :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 - 2z \\ y = \frac{1+3z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2z + \frac{1}{3} + z \\ y = \frac{1}{3} + z \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{3} - z \\ y = \frac{1}{3} + z \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } S = \left\{ \left(\frac{13}{3} - z; \frac{1}{3} + z; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b)

$$(S_2) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ -x + 2y - 4z = -9 \end{cases}$$

Solution :

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 7 \\ -x + 2y - 4z = -9 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 7 \\ 3y - 5z = -9 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 7 \\ 4z = 12 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

On a mis le système sous forme échelonné et on peut maintenant facilement le résoudre.

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y = z \\ -y = 7 - 3z \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{(1; 2; 3)\}$.

(c)

$$(S_3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

Solution : Soient x, y, z des réels. Alors

$$(S_2) \iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 4z = -3 \\ -2y - 8z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x & & -5z = -4 \\ & \boxed{-1}y - 4z = -3 \\ & & 0 = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_3 \end{matrix}$$

(S_2) ne possède pas de solution.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, est-elle inversible? Si oui déterminer son inverse.

Solution : On choisit la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls donc elle est inversible. Par théorème, la matrice P est elle aussi inversible.

Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.