

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 15

Exercice 1 –

1. Donner la définition de fonction convexe.

Solution : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si, pour tout x et y dans I , et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

2. Énoncer l'inégalité des pentes pour une fonction convexe.

Solution : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est convexe sur I , alors pour tous $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Exercice 2 –

1. Rappeler la dérivée de Arctan et montrer que Arctan est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. On a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}'(x)| \leq 1$.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|$$

Autrement dit, Arctan est 1-Lipschitzienne.

2. Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$