

INTERRO DE COURS – NUMÉRO 14

Exercice 1 –

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Rappeler la définition de « f dérivable en a » et du « nombre dérivé $f'(a)$. »

Solution : On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite quand $x \rightarrow a$ et on appelle alors, nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$, le nombre $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

2. Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle.

Solution : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2 –

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la régularité de f en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et par encadrement de la fonction sinus, on en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et, à nouveau par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc, f' est continue en 0.

Bref, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée 5-ième de $x \mapsto x^6 \cos(x)$.

Solution : On applique la formule de Leibniz. Appelons f cette fonction. Pour tout

$x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= 720x \cos(x) + 5 \times 360x^2 \times (-\sin(x)) + 10 \times 120x^3 \times (-\cos(x)) \\ &\quad + 10 \times 30x^4 \times \sin(x) + 5 \times 6x^5 \times \cos(x) + x^6 \times (-\sin(x)) \\ &= (30x^5 - 1200x^3 + 720x) \cos(x) + (-x^6 + 300x^4 - 1800x^2) \end{aligned}$$