CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 8

Problème 1

1. La puce effectue un saut d'une, deux ou trois unités vers la droite donc :

$$A_1(\Omega) = [\![1;3]\!]$$

À l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 1 avec le probabilité $\frac{1}{2}$, i.e

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

À l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 2 avec le probabilité $\frac{1}{4}$, i.e

$$P(A_2) = \frac{1}{4}$$

À l'issu du premier saut, la puce se trouve sur le point d'abscisse 3 avec le probabilité $\frac{1}{4}$, i.e

$$P(A_3) = \frac{1}{4}$$

Ainsi, la loi de la variable aléatoire A_1 est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(A_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ainsi,

$$E(A_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Pour calculer $V(A_1)$, on commence par calculer $E(A_1^2)$ via la formule de transfert :

$$E(A_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Puis, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(A_1) = E(A_1^2) - E(A_1)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}$$

2. (a) Au minimum, au bout de deux sauts, la puce s'est déplacée deux fois d'une seule unité vers la droite, et au maximum, elle s'est déplacée deux fois de trois unités vers la droite. La puce peut également s'être déplacée de 3, 4 ou 5 unités. Bref,

$$A_2(\Omega) = [\![2;6]\!]$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_2=2)=P(A_1=1)\times\underbrace{P_{A_1=1}(A_2=2)}_{=\frac{1}{2}}+P(A_1=2)\times\underbrace{P_{A_1=2}(A_2=2)}_{=0}+P(A_1=3)\times\underbrace{P_{A_1=3}(A_2=2)}_{=0}$$
$$=\frac{1}{2}\times P(A_1=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

De même, D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_2=3)=P(A_1=1)\times\underbrace{P_{A_1=1}(A_2=3)}_{=\frac{1}{4}}+P(A_1=2)\times\underbrace{P_{A_1=2}(A_2=3)}_{=\frac{1}{2}}+P(A_1=3)\times\underbrace{P_{A_1=3}(A_2=3)}_{=0}$$
$$=\frac{1}{4}\times P(A_1=1)+\frac{1}{2}\times P(A_1=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(A_2=4)=P(A_1=1)\times\underbrace{P_{A_1=1}(A_2=4)}_{=\frac{1}{4}}+P(A_1=2)\times\underbrace{P_{A_1=2}(A_2=4)}_{=\frac{1}{4}}+P(A_1=3)\times\underbrace{P_{A_1=3}(A_2=4)}_{=\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\times P(A_1=1)+\frac{1}{4}\times P(A_1=2)+\frac{1}{2}P(A_1=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

$$P(A_2=5)=P(A_1=1)\times\underbrace{P_{A_1=1}(A_2=5)}_{=0}+P(A_1=2)\times\underbrace{P_{A_1=2}(A_2=5)}_{=\frac{1}{4}}+P(A_1=3)\times\underbrace{P_{A_1=3}(A_2=5)}_{=\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{4}\times P(A_1=2)+\frac{1}{4}P(A_1=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(A_2=6)=P(A_1=1)\times\underbrace{P_{A_1=1}(A_2=6)}_{=0}+P(A_1=2)\times\underbrace{P_{A_1=2}(A_2=6)}_{=0}+P(A_1=3)\times\underbrace{P_{A_1=3}(A_2=6)}_{=\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{4}\times P(A_1=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

Ainsi, la loi de la variable aléatoire A_2 est donnée par :

k	2	3	4	5	6
$P(A_2=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

On peut au passage vérifier que l'on a bien $\sum_{k=2}^{6}P(A_2=k)=1$.

(b) On a :

$$E(A_2)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}=\frac{56}{16}=\frac{7}{2}$$

3. (a) Calculons les probabilités $P([A_2=i]\cap[Z_2=j])$ avec $i\in[\![2;6]\!]$ et $j\in[\![0;2]\!]$:

- $[A_2=2]\cap[Z_2=0]$ signifie que l'on a fait deux sauts d'une unité. Ainsi,

$$P([A_2=2]\cap[Z_2=0])=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

- $[A_2=3]\cap[Z_2=0]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut d'une unité puis un deuxième saut de deux unités;
  - ⋆ soit un premier saut de deux unités puis un deuxième saut d'une unité.

Ainsi,
$$P([A_2=3]\cap[Z_2=0])=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

- $[A_2=4]\cap[Z_2=0]$ signifie que l'on a effectué deux sauts de deux unités ($[Z_2=0]$ impose de ne faire aucun saut de trois unités, ce qui exclut les cas où l'on fait un saut d'une unité et un saut de trois unités). Ainsi,
$$P([A_2=4]\cap[Z_2=0])=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

- $[A_2=5]\cap[Z_2=0]$ est un évènement impossible puisque la puce ne peut se retrouver à l'abscisse 5 en deux sauts sans avoir fait de saut de trois unités. Ainsi,
$$P([A_2=5]\cap[Z_2=0])=0$$

- De même, $[A_2=6]\cap[Z_2=0]$ est un évènement impossible donc :
$$P([A_2=6]\cap[Z_2=0])=0$$

- $[A_2=2]\cap[Z_2=1]$ est un évènement impossible puisque la puce ne peut se retrouver à l'abscisse 2 après deux sauts, tout en ayant fait un saut de trois unités. Ainsi,
$$P([A_2=2]\cap[Z_2=1])=0$$

- De même,
$$P([A_2=3]\cap[Z_2=1])=0$$

- $[A_2=4]\cap[Z_2=1]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut d'une unité puis un deuxième saut de trois unités;
  - ⋆ soit un premier saut de trois unités puis un deuxième saut d'une unité.

  Le cas de deux sauts de deux unités est exclu puisque $[Z_2=1]$ impose de faire un saut de trois unités. Bref,
$$P(A_2=4]\cap[Z_2=1])=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

- $[A_2=5]\cap[Z_2=1]$ signifie que la puce a effectué :
  - ⋆ soit un premier saut de deux unités puis un deuxième saut de trois unités;
  - ⋆ soit un premier saut de trois unités puis un deuxième saut de deux unités.

  Ainsi,
$$P([A_2=5]\cap[Z_2=1])=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

- $[A_2=6]\cap[Z_2=1]$ est un évènement impossible puisque la puce ne peut se retrouver à l'abscisse 6 après deux sauts en ayant fait un seul saut de trois unités. Ainsi,
$$P([A_2=6]\cap[Z_2=1])=0$$

- Les évènement $[A_2=2]\cap[Z_2=3]$, $[A_2=3]\cap[Z_2=3]$, $[A_2=4]\cap[Z_2=3]$, $[A_2=5]\cap[Z_2=3]$ sont impossibles puisque si la puce fait deux sauts de trois unités, alors elle se retrouve forcément à l'abscisse 6. Ainsi,

$$P([A_2=2]\cap[Z_2=3])=P([A_2=3]\cap[Z_2=3])=P([A_2=4]\cap[Z_2=3])=P([A_2=5]\cap[Z_2=3])=0$$

- ENFIN, l'évènement $[A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2]$ signifie que la puce a effectué deux sauts de trois unités et donc :

$$P([A_2 = 6] \cap [Z_2 = 2]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Ainsi, la loi du couple (A_2, Z_2) est donnée par le tableau suivant :

	$A_2 = 2$	$A_2 = 3$	$A_2 = 4$	$A_2 = 5$	$A_2 = 6$
$Z_2 = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$Z_2 = 1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
$Z_2 = 2$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

On peut au passage vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1.
La loi de Z_2 s'obtient en additionnant les probabilités figurant sur chaque ligne du tableau ci-dessus :

$$P(Z_2 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 0 + 0 = \frac{9}{16}$$
$$P(Z_2 = 1) = 0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}$$
$$P(Z_2 = 2) = 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Z_2 = k)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

On a alors :

$$E(Z_2) = 0 \times \frac{9}{16} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(b) Pour calculer $\text{Cov}(A_2, Z_2)$, on commence par calculer $E(A_2 Z_2)$. On a :

$$E(A_2 Z_2) = 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 5 \times \frac{1}{8} + 2 \times 6 \times \frac{1}{16} = \frac{19}{8}$$

Or, d'après **2.(b)** $E(A_2) = \frac{7}{2}$ et d'après **3.(a)** $E(Z_2) = \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après la formule de Huygens,

$$\text{Cov}(A_2, Z_2) = E(A_2 Z_2) - E(A_2)E(Z_2) = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Si A_2 et Z_2 étaient indépendantes, alors on aurait $\text{Cov}(A_2, Z_2) = 0$. Ce n'est pas le cas, donc A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. X_n compte le nombre de succès (i.e « la puce se déplace d'une unité vers la droite ») lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)}$$

Y_n compte le nombre de succès (i.e « la puce se déplace de deux unités vers la droite ») lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, Y_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{4}\right)}$$

Z_n compte le nombre de succès (i.e « la puce se déplace de trois unités vers la droite ») lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, Z_n suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{Z_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{4}\right)}$$

Enfin, à chaque instant, la probabilité que la puce se déplace d'une ou deux unités vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi, $X_n + Y_n$ compte le nombre de succès (i.e « la puce se déplace d'une ou deux unités vers la droite ») lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{3}{4}\right)}$$

5. (a) Puisqu'à chaque instant, la puce se déplace d'une, deux ou trois unités, $X_n + Y_n + Z_n$ est égal au nombre total de déplacements à l'issue des n sauts, donc :

$$\boxed{X_n + Y_n + Z_n = n}$$

On a donc $X_n + Y_n = n - Z_n$ et donc :

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = \text{Cov}(Z_n, n - Z_n) = \text{Cov}(Z_n, n) - \text{Cov}(Z_n, Z_n)$$

Or, $\text{Cov}(Z_n, n) = 0$ et :

$$\text{Cov}(Z_n, Z_n) = V(Z_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$$

Par conséquent,

$$\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) = -\frac{3n}{16}$$

(b) On a $X_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$ donc $V(X_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
On a $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{4}\right)$ donc $V(Y_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$.
On a $X_n + Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{3}{4}\right)$ donc $V(X_n + Y_n) = np(1-p) = n \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3n}{16}$.
Or, on sait que :

$$V(X_n + Y_n) = V(X_n) + V(Y_n) + 2\text{Cov}(X_n, Y_n)$$

d'où :

$$\frac{3n}{16} = \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 2\text{Cov}(X_n, Y_n)$$

Et donc :

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{\frac{3n}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16}}{2} = \frac{-\frac{n}{4}}{2} = -\frac{n}{8}$$

6. (a) Au cours des n sauts, les X_n sauts d'une unité augmentent l'abscisse de X_n unités, les Y_n sauts de deux unités augmentent l'abscisse de $2Y_n$ unités, et les Z_n sauts de trois unités augmentent l'abscisse de $3Z_n$ unités. Ainsi,

$$\boxed{A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n}$$

Et donc,

$$E(A_n) = E(X_n) + 2E(Y_n) + 3E(Z_n) = n\frac{1}{2} + 2 \times n \times \frac{1}{4} + 3 \times n \times \frac{3}{4} = \frac{7n}{4}$$

(b) D'après la question **6.(a)**, on a $X_n + Y_n + Z_n = n$ donc $Z_n = n - (X_n + Y_n)$. Et donc,

$$\begin{aligned} A_n &= X_n + 2Y_n + 3(n - (X_n + Y_n)) \\ &= X_n + 2Y_n + 3n - 3X_n - 3Y_n \\ &= 3n - 2X_n - Y_n \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, on a alors :

$$\begin{aligned} V(A_n) &= V(3n - (2X_n + Y_n)) \\ &= (-1)^2 V(2X_n + Y_n) \\ &= V(2X_n) + V(Y_n) + 2\mathrm{Cov}(2X_n, Y_n) \\ &= 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la question **6.(b)**, on obtient alors :

$$\begin{aligned} V(A_n) &= 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) \\ &= 4 \times \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 4 \times \left(-\frac{n}{8}\right) \\ &= n + \frac{3n}{16} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{19n}{16} - \frac{8n}{16} \\ &= \frac{11n}{16} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(A_n, X_n) &= \mathrm{Cov}(3n - 2X_n - Y_n, X_n) \\ &= \mathrm{Cov}(3n, X_n) - 2\mathrm{Cov}(X_n, X_n) - \mathrm{Cov}(Y_n, X_n) \\ &= 0 - 2V(X_n) - \mathrm{Cov}(X_n, Y_n) \\ &= -2 \times \frac{n}{4} + \frac{n}{8} \\ &= -\frac{3n}{8} \end{aligned}$$

Problème 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

De plus

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par suite $u_n-u_{n+1}=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $(u_n-u_{n+1})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$.

(b) Comme $(u_n-u_{n+1})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$ alors (u_n-u_{n+1}) est positive à partir d'un certain rang, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_n-u_{n+1})$ converge.

(c) Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_n-u_{n+1})$. On a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k-u_{k+1})=u_1-u_{n+1}$$

donc $u_n=u_1-S_{n-1}$. La convergence de $\sum_{n\geqslant 1}(u_n-u_{n+1})$ entraine la convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(d) Soit $n\geqslant 2$,et $1\leqslant k\leqslant n-1$. Pour $t\in[k,k+1]$ on a $\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$ ce qui donne

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{k}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ ainsi $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\ln n\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(e) D'après d) $H_n-1\leqslant\ln n\leqslant H_n-\frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n}\leqslant H_n-\ln(n)\leqslant 1$, par passage à la limite on obtient $0\leqslant\gamma\leqslant 1$.

2. (a) D'après c) on a, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=u_1-S_{n-1}$ et $u_1=1$ de plus $u_n-u_{n+1}=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned}u_n&=1-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient $\gamma=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

(b) $v_n=u_n-\gamma=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$, donc $v_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$ c'est le reste de la série $\sum_{k\geqslant 2}\left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$.

(c) On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}&=-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}\\&=\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\end{aligned}$$

donc $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$, les deux séries $\sum \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)-\frac{1}{k}$ et $\sum \frac{1}{2k^2}$ convergents donc les restes sont équivalents, ce qui donne $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$, ainsi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

car si $\alpha > 1$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. On a $v_n = \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $H_n = \ln(n)+\gamma+v_n = \ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n; $w_n = u_n-\gamma-\frac{1}{2n}$.

   (a) On a

$$w_{n+1}-w_n = u_{n+1}-u_n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}$$

et

$$u_n-u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$$

donc

$$w_{n+1}-w_n = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n}.$$

Comme

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n &= \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

et $w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$.

   (b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(1-\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$$

les deux séries $\sum \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}, \sum \frac{2}{n^3}$ convergent donc les restes sont équivalents, de plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

(c) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$w_n = u_n-\gamma-\frac{1}{2n} \text{ et } w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$$

donc la série $\sum (w_{n+1}-w_n)$ converge.

Remarquons que la somme partielle $\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = w_n-w_1$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) = -w_1$$

et le reste

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) = \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Des relations

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) &= -w_1\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)+\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)\\ &= w_n-w_1+\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

on a

$$w_n = \frac{-1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $H_n = w_n+\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}$ alors

$$H_n = \ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n = \min\left\{k\in\mathbb{N}^* \mid H_k \geqslant n\right\}$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Comme la suite $(H_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante et tend vers l'infini, alors l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geqslant n\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$ et admet donc un plus petit élément.

(b) Par définition de m_n on a $H_{m_n} \geqslant n$ et $H_{m_n-1} < n$. De la question 1)d) on a $n \leqslant H_{m_n} \leqslant \ln m_n + 1$ donc $\mathrm{e}^{n-1} \leqslant m_n$ et $m_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. De la question 2) c) on a $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ donc

$$\ln(m_n) + \gamma + \varepsilon_{m_n} \geqslant n \text{ et } \ln(m_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{m_n-1} < n$$

Ainsi $\exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}\right) \leqslant m_n < 1 + \exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n-1}\right)$

(c) La relation précédente donne

$$\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right) \leqslant \frac{m_n}{\exp(n-\gamma)} < \exp(-n+\gamma) + \exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)$$

Comme $\varepsilon_{m_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\dfrac{m_n}{\exp(n-\gamma)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(n-\gamma)$.

(d) La question b) donne

$$\frac{\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{1+\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{1+\exp\left(n+1-\gamma-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(n-\gamma-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

après simplification

$$\frac{\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}}\right)}{\exp(-n+\gamma)+\exp\left(-\varepsilon_{m_n-1}\right)} < \frac{m_{n+1}}{m_n} < \frac{\exp(-n+\gamma)+\exp\left(1-\varepsilon_{m_{n+1}-1}\right)}{\exp\left(-\varepsilon_{m_n}\right)}$$

Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}$.

Problème 3

Partie I

I.1 La matrice de $u \circ u$ étant J^2, on a $u \circ u = \theta$ si et seulement si J^2 est la matrice nulle, ce qui est le cas. Donc

$$\boxed{u \circ u = \theta.}$$

I.2 (a) Le rang de u est le rang de J, c'est-à-dire la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes. Or on constate que les colonnes 2 et 3 de la matrice sont colinéaires à la première, qui n'est pas nulle, donc J est de rang 1 et donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(u) = 1.}$$

(b) Par définition du rang d'un endomorphisme, on peut affirmer que

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) = 1.}$$

On lit dans la matrice J que $u((1,0,0)) = (-1,-2,1)$ donc le vecteur $(-1,-2,1)$ est non nul et appartient à $\mathrm{Im}(u)$. Puisque $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 1, on obtient que

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{Im}(u) \text{ est } ((-1,-2,1)).}$$

(c) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Toute application linéaire f de E dans F est de rang fini et vérifie :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).}$$

(d) On a

$$M_{\mathcal{B}}(u((-1,-2,1))) = M_{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}((-1,-2,1)) = J\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}((0,0,0))$$

donc $\boxed{u((-1,-2,1)) = (0,0,0).}$ En procédant de même, on obtient $\boxed{u((0,1,-1)) = (0,0,0).}$

En appliquant le théorème du rang à u, sachant que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on obtient que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$. Les calculs précédents montrent que les vecteurs $(-1,-2,1)$ et $(0,1,-1)$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils sont linéairement indépendants donc

$$\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(u) \text{ est } ((-1,-2,1),(0,1,-1)).}$$

(e) Le vecteur $(-1,-2,1)$ appartient à la fois à l'image et au noyau de u donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ ne sont pas en somme directe donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(u) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

I.3 (a) On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\-2 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = 1$$

en développant le déterminant suivant la troisième colonne. Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ ce qui prouve que

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

(b) On a vu que les images des deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}'$ sont le vecteur nul et que $u((1,0,0)) = (-1,-2,1)$ donc

$$\boxed{J' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

(c) La matrice P est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\-2 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}.}$$

(d) On utilise la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\widetilde{\qquad}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\widetilde{\qquad}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -2 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\widetilde{\qquad}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\widetilde{\qquad}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Le calcul donne donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.}$

(e) D'après le cours, on a $\boxed{J' = P^{-1}JP.}$

Partie II

II.1 Soient A et B deux éléments de Δ. Il existe donc deux réels a et b tels que $A = I_3 + aJ$ et $B = I_3 + bJ$. On a

$$AB = (I_3 + aJ)(I_3 + bJ) = I_3 + (a+b)J + abJ^2$$

et comme J^2 est la matrice nulle, on obtient $AB = I_3 + (a+b)J$. Comme $a+b$ est un réel, la matrice AB appartient à Δ. Finalement,

$$\boxed{\Delta \text{ est stable par multiplication.}}$$

II.2 (a) D'après la question précédente, on a $M^2 = I_3 + 2mJ = 2(I_3 + mJ) - I_3$ donc

$$\boxed{M^2 = 2M - I_3.}$$

(b) D'après la question précédente : $2M - M^2 = I_3$ donc $M(2I_3 - M) = I_3$ donc $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = 2I_3 - M.}$

On a $M^{-1} = 2I_3 - (I_3 + mJ) = I_3 - mJ = I_3 + (-m)J$ donc $\boxed{M^{-1} \text{ est un élément de } \Delta.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété : $M^n = I_3 + nmJ$.

- La propriété P_0 est vraie puisque $M^0 = I_3$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie. Alors

$$M^{n+1} = M^n M = (I_3 + nmJ)(I_3 + mJ) = I_3 + (n+1)mJ + nm^2J^2$$

et puisque J^2 est la matrice nulle, on obtient $M^{n+1} = I_3 + (n+1)mJ$. Donc P_{n+1} est vraie

$$\boxed{\text{Par récurrence, pour tout entier naturel } n, \text{ on a } M^n = I_3 + nmJ.}$$

Partie III

III.1 Soit $X \in \Delta$ et x le réel tel que $X = I_3 + xJ$. D'après la partie II, on a $X^2 = I_3 + 2xJ$. Ainsi,

$$X^2 = M \iff I_3 + 2xJ = I_3 + mJ \iff (2x - m)J = 0 \iff x = \frac{m}{2}$$

puisque J n'est pas la matrice nulle. Finalement,

$$\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ appartenant à } \Delta \text{ est la matrice } I_3 + \frac{m}{2}J.}$$

III.2 D'après la partie I, on a $P^{-1}JP = J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,3}$ donc

$$P^{-1}MP = P^{-1}(I_3 + mJ)P = (P^{-1}I_3P) + m(P^{-1}JP) = I_3 + mE_{1,3}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } P^{-1}MP = N \text{ où } N = I_3 + mE_{1,3}.}$$

III.3 On a $X = PYP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} X^2 = M &\iff (PYP^{-1})^2 = M \\ &\iff PYP^{-1}PYP^{-1} = M \\ &\iff PY^2P^{-1} = M \\ &\iff Y^2 = P^{-1}MP \qquad \text{(multiplication par des matrices inversibles)} \\ &\iff Y^2 = N. \end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{X^2 = M \iff Y^2 = N.}$

III.4 On a $YN = Y(Y^2) = Y^3 = Y^2(Y) = NY$ ainsi $\boxed{YN = NY.}$

On a

$$YN = Y(I_3 + mE_{1,3}) = Y + mYE_{1,3} = Y + m\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

et

$$NY = (I_3 + mE_{1,3})Y = Y + mE_{1,3}Y = Y + m\begin{pmatrix} g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $YN = NY$, on a $Y + mYE_{1,3} = Y + mE_{1,3}Y$ donc $mYE_{1,3} = mE_{1,3}Y$ et puisque $m \neq 0$, cela donne $YE_{1,3} = E_{1,3}Y$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $a = k$ et $g = d = h = 0$. Ainsi,

$$\boxed{Y \text{ est triangulaire supérieure et } a = k.}$$

III.5 D'après la question précédente, les candidats solutions à l'équation $Y^2 = N$ sont de la forme $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Pour une telle matrice, on a

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+e) & 2ac+bf \\ 0 & e^2 & f(a+e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
Y^2 = N &\iff \begin{pmatrix} a^2 & b(a+e) & 2ac+bf \\ 0 & e^2 & f(a+e) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ e^2 = 1 \\ b(a+e) = 0 \\ f(a+e) = 0 \\ 2ac + bf = m \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ e = 1 \text{ ou } e = -1 \\ b(a+e) = 0 \\ f(a+e) = 0 \\ 2ac + bf = m \end{cases} \\
&\iff Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{m}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{ou } Y = \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{m-bf}{2} \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } Y = \begin{pmatrix} -1 & b & \frac{bf-m}{2} \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{donc l'ensemble des solutions de l'équation } Y^2 = N \text{ est} \\ \mathcal{E} = \left\{-I_3 - \frac{m}{2}E_{1,3} ; I_3 + \frac{m}{2}E_{1,3}\right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{m-bf}{2} \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & b & \frac{bf-m}{2} \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b, f \in \mathbb{R} \right\}.\end{gathered}}$$

III.6 L'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\left\{P^{-1} Y P \mid Y \in \mathcal{E}\right\}.}$$

Partie IV

IV.1 Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a alors $v(y) = v(v(x)) = v \circ v(x) = \theta(x) = 0_E$ donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v).}$$

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Ker}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(E)$$

donc
$$p + r = n.$$
Comme $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$, on a $\dim(\mathrm{Im}(v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(v))$ c'est-à-dire $r \leqslant p$. On obtient donc $n - p \leqslant p$ ce qui donne $2p \geqslant n$ et donc $p \geqslant \frac{n}{2}$. De même, on a $r \leqslant n - r$ donc $2r \leqslant n$ et donc $r \leqslant \frac{n}{2}$. Finalement,
$$\boxed{r \leqslant n/2 \quad \text{et} \quad p \geqslant n/2.}$$

IV.2 (a) Puisque $n = 2$, la question précédente donne $r \leqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Or $r + p = 2$ et $r \neq 0$ puisque v n'est pas l'endomorphisme nul. Donc $r = p = 1$. Ainsi, $\mathrm{Im}(v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(v)$ qui a même dimension que $\mathrm{Ker}(v)$ donc
$$\boxed{\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v).}$$

(b) Puisque (e_1, e_2) est constituée de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient λ et μ deux scalaires. On suppose que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$. Alors, on a
$$v(\lambda e_1 + \mu e_2) = v(0_E)$$
ce qui donne par linéarité de v
$$\lambda v(e_1) + \mu v(e_2) = 0_E$$
c'est-à-dire puisque $e_1 \in \mathrm{Ker}(v)$,
$$0_E + \mu e_1 = 0_E.$$
On en déduit que $\mu = 0$ puis que $\lambda = 0$. Donc la famille (e_1, e_2) est libre et donc
$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } E.}$$
On a $e_1 \in \mathrm{Ker}(v)$ donc $v(e_1) = 0_E$ et $v(e_2) = e_1$ donc dans cette base, la matrice de v est
$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

IV.3 (a) On reprend la même méthode que précédemment : on a
$$p + r = 3 \qquad r \leqslant \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad p \geqslant \frac{3}{2}.$$
Puisque p et r sont des entiers et que $r \neq 0$, on a donc
$$\boxed{r = 1 \text{ et donc } p = 2.}$$

(b) On note e_1 un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Im}(v)$. On considère un antécédent e_3 à e_1 par v. Comme e_1 appartient à $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$, on a $e_1 \in \mathrm{Ker}(v)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter (e_1) en une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(v)$. La famille de trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) est alors une famille libre : en reprenant la même méthode, on montre que si λ, μ, ν sont trois scalaires tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, on obtient $\nu = 0$ en composant par v puis $\lambda = \mu = 0$ par liberté de la famille (e_1, e_2). Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et dans cette base, $\boxed{\text{la matrice de } v \text{ est } E_{1,3}.}$

Problème 4

Partie I

I.1 U et V suivent la même loi, si et seulement si, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(U=k)=P(V=k)$, si et seulement si, $S_U = S_V$ par identification des coefficients.
Ainsi le polynôme générateur caractérise bien la loi d'une variable aléatoire.

I.2 (a) Comme U est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$,

$$S_U(1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U=k) = 1$$

Puis $S'_U(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(U=k)X^{k-1}$ et donc

$$S'_U(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{E}(U)$$

(b) On a : $S''_U = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U=k)X^{k-2}$. Et donc :

$$S''_U(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U_k) = \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbf{P}(U=k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(U=k) = \mathbf{E}\left(U^2\right) - \mathbf{E}(U)$$

On a donc (tenant compte du résultat de la question précédente, et par la formule de König-Huygens) :

$$S''_U(1) + S'_U(1)\left(1 - S'_U(1)\right) = \mathbf{E}\left(U^2\right) - \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(U)(1-\mathbf{E}(U)) = \mathbf{E}\left(U^2\right) - [\mathbf{E}(U)]^2 = \mathbf{V}(U)$$

I.3 (a) On a donc $U(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in U(\Omega), \mathbf{P}(U=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$S_U = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}X^k = (pX+(1-p))^n$$

Et en particulier $S'_U = np\left(pX+(1-p)\right)^{n-1}$ et donc

$$\mathbf{E}(U) = S'_U(1) = np(p+(1-p))^{n-1} = np$$

Puis, $S''_U = n(n-1)p^2\left(pX+(1-p)\right)^{n-2}$ et donc

$$\mathbf{V}(U) = S''_U(1) + S'_U(1)\left(1 - S'_U(1)\right) = n(n-1)p^2 + np(1-np) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

(b) On a donc $U(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in U(\Omega), \mathbf{P}(U=k) = \frac{1}{n}$, donc

$$S_U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}X^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X^k = \frac{1}{n}\frac{X-X^{n+1}}{1-X}$$

Et en particulier $S'_U = \frac{1}{n}\frac{(1-(n+1)X^n)(1-X)+\left(X-X^{n+1}\right)}{(1-X)^2} = \frac{1}{n}\frac{1-(n+1)X^n+nX^{n+1}}{(1-X)^2}$.
Le numérateur $n_1 : t \mapsto 1-(n+1)t^n + nt^{n+1}$ admet pour dérivées

- $n_1' : t \mapsto -n(n+1)t^{n-1} + n(n+1)t^n$ donc $n_1'(1) = 0$,
- $n_1'' : t \mapsto -(n-1)n(n+1)t^{n-2} + n^2(n+1)t^{n-1}$, donc $n_1''(1) = n(n+1)[n-(n-1)] = n(n+1)$

Le dénominateur $d_1 : t \mapsto (1-t)^2$ admet pour dérivées

- $d_1' : t \mapsto -2(1-t)$ donc $d_1'(1) = 0$,
- $d_1'' : t \mapsto 2$, donc $d_1''(1) = 2$

Ainsi, comme S_U' est en réalité un polynôme S_U' est continue et

$$\mathbf{E}(U) = S_U'(1) = \frac{1}{n}\lim_{t\to 1}\frac{n_1(t)}{d_1(t)} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

Puis

$$\begin{aligned}S_U'' &= \frac{1}{n}\frac{\left(-(n+1)nX^{n-1} + n(n+1)X^n\right)(1-X) + 2\left(1-(n+1)X^n + nX^{n+1}\right)}{(1-X)^3}\\ &= \frac{1}{n}\frac{2 - n(n+1)X^{n-1} + 2(n-1)(n+1)X^n - n(n-1)X^{n+1}}{(1-X)^3}\end{aligned}$$

Le numérateur $n_2 : t \mapsto 2 - n(n+1)t^{n-1} + 2(n-1)(n+1)t^n - n(n-1)t^{n+1}$ admet pour dérivées

- $n_2' : t \mapsto -(n-1)n(n+1)t^{n-2} + 2(n-1)n(n+1)t^{n-1} - (n-1)n(n+1)t^n$ donc $n_2'(1) = 0$,
- $n_2'' : t \mapsto -(n-2)(n-1)n(n+1)t^{n-3} + 2(n-1)^2n(n+1)t^{n-2} - (n-1)n^2(n+1)t^{n-1}$,

$$\text{donc } n_2''(1) = (n-1)n(n+1)[-(n-2) + 2(n-1) - n] = 0$$

- $n_2''' : t \mapsto -(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)t^{n-4} + 2(n-2)(n-1)^2n(n+1)t^{n-3} - (n-1)^2n^2(n+1)t^{n-2}$,

$$\text{donc } n_2'''(1) = (n-1)n(n+1)[-(n-3)(n-2) + 2(n-2)(n-1) - (n-1)n] = (n-1)n(n+1)[-2]$$

Le dénominateur $d_2 : t \mapsto (1-t)^3$ admet pour dérivées

- $d_2' : t \mapsto -3(1-t)^2$ donc $d_2'(1) = 0$,
- $d_2'' : t \mapsto 6(1-t)$, donc $d_2''(1) = 0$,
- $d_2''' : t \mapsto -6$, donc $d_2'''(1) = -6$.

Ainsi, comme S_U'' est en réalité un polynôme S_U'' est continue et :

$$S_U''(1) = \frac{1}{n}\lim_{t\to 1}\frac{n_2(t)}{d_2(t)} = \frac{-2(n-1)n(n+1))}{6n} = \frac{n^2-1}{3}$$
$$\mathbf{V}(U) = S_U''(1) + S_U'(1)\left(1 - S_U'(1)\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{3} + \frac{n+1}{2}\frac{1-n}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

I.4 (a) La formule de transfert donne

$$\mathbf{E}\left(t^U\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(U=k)t^k = S_U(t)$$

(b) Si on note, $g : t \mapsto \mathbf{E}\left(t^U\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(U=k)t^k$, g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynome) et $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}(U=k)t^{k-1} = \mathbf{E}\left(Ut^{U-1}\right)$. On retrouve la dérivée $g'(t) = \mathbf{E}\left(\dfrac{\partial t^U}{\partial t}\right)$, car $\mathbf{E}$ est linéaire. Et donc de même $g''(t) = \mathbf{E}\left(U(U-1)t^{U-2}\right)$.

(c) Ainsi en $t = 1$, on trouve :

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}\left(U \times 1^{U-1}\right) = g'(1) = S'_U(1) \quad \mathbf{E}(U(U-1)) = \mathbf{E}\left(U(U-1) \times 1^{U-2}\right) = g''(1) = S''_U(1)$$

I.5 Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} S_{U+V} &= \sum_{k=0}^{2n} P(U+V=k)X^k = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} P(U=j, V=k-j)X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} P(U=j)P(V=k-j)X^k \qquad \text{par indépendance de } U \text{ et } V \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} P(U=k)X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} P(V=k)X^k\right) = S_U \times S_V \qquad \text{par produit de Cauchy} \end{aligned}$$

I.6 (a) Montrons le résultat par récurrence. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_k$: « $S_{V_k} = S_{U_1} \times S_{U_2} \times \cdots \times S_{U_k}$ ».

- Si $k = 1$, alors $V_1 = U_1$ et le résultat est immédiat.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
  Considérons $V_{k+1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_k + U_{k+1} = V_k + U_{k+1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  Les variables aléatoires $(U_1, \ldots U_k, U_{k+1})$ sont indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions $V_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$ et U_{k+1} sont indépendants. Ainsi d'après la question I.5, on a :
  $$S_{V_{k+1}} = S_{V_k} \times S_{U_{k+1}}$$
  Puis, comme $\mathcal{P}_k$ est vraie : $S_{V_k} = \prod_{i=1}^{k} S_{U_i}$; et donc $S_{V_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k+1} S_{U_i}$ et ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_{V_k} = \prod_{i=1}^{k} S_{U_i}$$

Si pour tout i, U_i suit la même loi que U, alors $S_{U_i} = S_U$ (question I.1) et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_{V_k} = (S_U)^k$$

(b) W est toujours à valeurs dans $\mathbb{N}$ (et fini), donc S_W est bien définie comme polynôme (la somme est en réalité finie) :

$$S_W = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W=k)X^k$$

N est une variable aléatoire fini, avec $N(\Omega) = [\![0, M]\!]$. On applique la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(W=k) = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{P}(N=m)\mathbf{P}_{N=m}(W=k)$$

D'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
S_W &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W=k)X^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{M} \mathbf{P}(N=m)\mathbf{P}\left(V_m=k\right)\right)X^k \\
&= \sum_{m=0}^{M}\left(\mathbf{P}(N=m)\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(V_m=k\right)X^k\right) = \sum_{m=0}^{M}\left(\mathbf{P}(N=m)S_{V_m}(X)\right) \\
&= \sum_{m=0}^{M} \mathbf{P}(N=m)\left[S_U(X)\right]^m = S_N\left(S_U(X)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S_W = S_N \circ S_U}$.

Partie II

II.1 (a) Par définition de M_0, on a $\mathbf{P}\left(M_0=0\right)=1$, donc

$$\mathbf{P}\left(A_0\right)=1$$

Comme X_k est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors $M_{k+1}=M_k+X_k>M_k$.
La suite (aléatoire) $\left(M_k\right)$ est donc strictement croissante et donc $M_1>M_0=0$, donc $M_1 \geqslant 1$.
Et finalement on a les équivalences : $1 \in E \Longleftrightarrow M_1=1 \Longleftrightarrow X_1=1$.
Or par hypothèse $\mathbf{P}\left(X_1=1\right)=\mu(1)$.

$$\mathbf{P}\left(A_1\right)=\mathbf{P}\left(X_1=1\right)=\mu(1)$$

(b) Soit $n \geqslant 1$. On a l'égalité ou l'équivalence des événements suivants :

$$\begin{aligned}
A_n &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } M_k=\sum_{i=1}^{k} X_i = n \\
&\Longleftrightarrow X_1=n \text{ ou } \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists t \in [\![1,N]\!] \text{ tels que } M_{k-1}=n-t \text{ et } X_k=t \\
&\Longleftrightarrow \exists t \in [\![1,N]\!], \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } M_{k-1}=n-t \text{ et } X_k=t \\
&\Longleftrightarrow \bigcup_{t=1}^{N}\left[\exists k \in \mathbb{N}^* \mid M_{k-1}=n-t \cap X_k=t\right] \Longleftrightarrow \bigcup_{t=1}^{N}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[M_{k-1}=n-t \cap X_k=t\right]\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A_n\right) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{t=1}^{N}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[M_{k-1}=n-t \cap X_k=t\right]\right)\right) \\
&= \sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[M_{k-1}=n-t \cap X_k=t\right]\right) = \sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} M_{k-1}=n-t\right)\mu(t)
\end{aligned}$$

car $M_{k-1}=\sum_{i=1}^{k-1} X_i$ et X_k sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A_n\right) &= \sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} M_{k-1}=n-t\right)\mu(t) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\mu(t)\mathbf{P}\left(\left[\exists k \in \mathbb{N}^* \mid M_{k-1}=n-t\right]\right) = \sum_{t=1}^{n}\mu(t)\mathbf{P}\left(A_{n-t}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbf{P}(A_{n-k})$$

(c) D'après la formule précédente,

$$\mathbf{P}(A_2) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbf{P}(A_{2-k}) = \mu(1)\mathbf{P}(A_1) + \mu(2)\mathbf{P}(A_0) = \mu(1)^2 + \mu(2)$$

(Pour aller en 2, il faut faire deux bons de 1 ou un bond de 2...).

II.2 On multiplie deux polynômes, on exploite la formule du produit de Cauchy. Pour faciliter la formalisation de la formule, on ajoutera les termes $\mu(0) = 0$ et $\mathbf{P}(U = h) = 0$ si $h > m + N + 2$:

$$S_\mu \times S_U = \left(\sum_{k=0}^{N} \mu(k)X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{m+N+1} \mathbf{P}(U = k)X^k\right) = \sum_{k=0}^{m+2N+1} \left(\sum_{i=0}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(U = k-i)\right) X^k$$

Or, si $k \leqslant m + N$, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $k - i \leqslant m$ et donc $\mathbf{P}(U = k - i) = \mathbf{P}(A_{k-i})$. Donc il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$S_\mu \times S_U = \sum_{k=0}^{m+N} \left(\sum_{i=0}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(A_{k-i})\right) X^k + X^{m+N}Q_1$$

Or comme $\mu(0) = 0$, $\left[S_\mu \times S_U\right]_0 = 0$ et donc on trouve :

$$S_\mu \times S_U = \sum_{k=1}^{m+N} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(A_{k-i})\right) X^k + X^{m+N}Q_1 = \sum_{k=1}^{m+N} \mathbf{P}(A_k) X^k + X^{m+N}Q_1$$

d'après la formule trouvée II.1.(b). Comme $\mathbf{P}(A_0) = 1$, $S_U = 1 + \sum_{k=1}^{m+N} \mathbf{P}(A_k) X^k + \mathbf{P}(U = n + M + 1)X^{n+M+1}$, on a :

$$S_\mu \times S_U = S_U - 1 + X^{m+N}(Q_1 - X\mathbf{P}(U = n + M + 1))$$

Bilan

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } S_\mu \times S_U = -1 + S_U + X^{m+N}Q$$

II.3 On note $F = \dfrac{1}{1 - S_\mu}$. $S_\mu(1) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$, donc 1 est bien un pôle de la fraction F.

$$S'_\mu(1) = \mathbf{E}(\mu) = \mu(1)+2\mu(2)+\dots N\mu(N) \geqslant \mu(1)+2\left(\sum_{k=2}^{N} \mu(k)\right) = \mu(1)+2(1-\mu(1)) = 2-\mu(1) > 1 \text{ car } \mu(1) < 1.$$

Donc 1 n'est pas un pôle double de F. Si z est un autre pôle de F, alors $S_\mu(z) = 1$. Pour montrer que $|z| > 1$, on va montrer par contraposée que pour tout z tel que $|z| < 1$, alors $\left|S_\mu(z)\right| < 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$ (on rappelle que $\mu(k) \geqslant 0$).

$$\left|S_\mu(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \mu(k)z^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \mu(k)|z|^k \leqslant |z| \left(\sum_{k=1}^{N} \mu(k)\right) \leqslant |z| < 1$$

II.4 D'après la question 2, $1-X^{n+M}Q = S_U\left(1-S_\mu\right)$, donc dans $\mathbb{K}(X)$:

$$S_U = \frac{1}{1-S_\mu} - \frac{X^{n+M}Q}{1-S_\mu}$$

La fraction $F = \dfrac{1}{1-S_\mu}$ admet 1 pour pôle simple et $z_1,\dots z_r$ pour pôle d'ordre $k_1\dots k_r$ respectivement (r nous est inconnu, ainsi que les nombres z_i et les ordres k_i).
Nous savons une seule chose : pour tout $i\in\mathbb{N}_r, |z_i|>1$.
La décomposition en éléments simples de F donne :

$$F = \frac{a}{X-1} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{b_{i,j}}{(X-z_i)^j} = \frac{a}{X-1} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}\frac{b_{i,j}}{\left(\frac{X}{z_i}-1\right)^j}$$

On sait, d'après une formule du cours que $a = \dfrac{1}{\left(1-S_\mu\right)'(1)} = \dfrac{1}{-S_\mu'(1)} = \dfrac{-1}{\mathbf{E}(X_1)}$ d'après la partie précédente.
On se souvient également (par téléscopage) que $(1-X)\displaystyle\sum_{i=0}^{m+N}X^i = 1-X^{n+M+1}$, donc dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X-1} = \frac{-1}{1-X} = -\sum_{i=0}^{m+N}X^i + \frac{X^{n+M+1}}{1-X}$$

Puis, la formule du binôme négative donne de la même manière pour tout $z_i, \exists Q_i\in\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\frac{1}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k} = \sum_{i=0}^{m+N}\binom{k+i-1}{i}\frac{1}{z^i}X^i + \frac{X^{m+N}}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k}Q_z$$

(On pourrait la démontrer formellement, par récurrence) On trouve donc :

$$S_U = \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}\sum_{i=0}^{n+M}X^i + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}(-1)^j b_{i,j}\sum_{k=0}^{m+N}\binom{j+k-1}{k}\frac{1}{z^k}X^k + X^{m+N}\overline{F}$$

où $\overline{F}$ est une fraction rationnelle, on peut alors identifier!!

$$[S_U]_n = \mathbf{P}([U=n]) = \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}(-1)^j b_{i,j}\binom{j+n-1}{n}\frac{1}{z^n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

car pour tout $i, |z_i|>1$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$

Partie III

III.1 φ est linéaire. En effet, pour tout $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $P_1,P_2\in E$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \frac{1}{n} X(1-X)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' + X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\
&= \frac{1}{n} X(1-X)\left(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2'\right) + X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\
&= \lambda_1 \left[\frac{1}{n} X(1-X) P_1' + X P_1\right] + \lambda_2 \left[\frac{1}{n} X(1-X) P_2' + X P_2\right] = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)
\end{aligned}$$

Plus compliqué : φ est une application de E dans E.
Supposons que $\deg P = k \leqslant n$ et que le terme dominant de P est $a_k X^k$,
Le terme de P' est $k a_k X^{k-1}$, puis celui de $\frac{1}{n} X(1-X) P'$ est $\frac{-k a_k}{n} X^{k+1}$.
Le terme dominant de XP est $a_k X^{k+1}$.
Si, il ne s'annule pas, le terme dominant de $\varphi(P)$ est alors $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k X^{k+1}$
De deux choses, l'une :
Ou bien $k < n$ et donc le terme dominant de $\varphi(P)$ est $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k X^{k+1}$, donc $\deg P = k+1 \leqslant n$
Ou bien $k = n$ et donc le coefficient $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k = 0$ et $\deg P \leqslant k = n$.
Donc $\deg P \leqslant n$ et $P \in E$
Bref, φ est bien un endomorphisme de E.

III.2 Soit $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi\left(X^k\right) = \frac{k}{n}\left(X^k - X^{k+1}\right) + X^{k+1} = \frac{n-k}{n} X^{k+1} + \frac{k}{n} X^k$, on vérifier que $\varphi\left(X^n\right) = X^n$, Ce qui conduit à la matrice suivante (en mettant $\frac{1}{n}$ en facteur) :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

La première ligne de A (de taille $n+1$) est nulle, donc son rang est inférieur à ($n+1$) - 1 = n.
Par ailleurs, la matrice extraite en enlevant la première ligne et la première est triangulaire inférieure, il s'agit de $\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n-1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, elle n'a aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible. Par ailleurs, elle est de taille n, donc elle est de rang n. Comme il existe, une matrice extraite de A de rang n, on a $\mathrm{rg}(A) \geqslant n$.
Par double inégalité $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi) = n$.

III.3 Puisque $\mathrm{rg}(\varphi) = n$, alors que φ est un endomorphisme de E, de dimension $n+1$, φ n'est pas surjectif, donc pas injectif.

III.4 Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi) = n+1-n = 1$.
De plus, si $P = \lambda(X-1)^n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) alors : $\varphi(P) = \frac{1}{n} \lambda n X(1-X)(X-1)^{n-1} + \lambda X(X-1)^n = 0$. Donc $\mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Par égalité des dimensions, on a donc bien :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}\big((X-1)^n\big)$$

III.5 (a) Les solutions de (E_0) sont les solutions de $\varphi(P)=0$, donc exactement les éléments de $\operatorname{Ker}\varphi$.

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}\big((X-1)^n\big)$$

(b) On cherche P tel que $\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP = P$, donc $n(X-1)P = X(X-1)P'$.
Comme, précédemment, on a donc $nP = XP'$ et donc $X \mid P$.
Notons alors a l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P :
$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X^a Q$ avec $Q(0) \neq 0$.
On a alors $P' = aX^{a-1}Q + X^a Q'$ et donc

$$XP' - nP = aX^aQ + X^{a+1}Q' - nX^aQ = X^a\left[(a-n)Q + XQ'\right]$$

Ce polynôme étant nul, nécessairement, $(a-n)Q + XQ'$ est le polynôme nul, et en particulier en substituant 0 à X : $(a-n)Q(0) + 0 = 0$.
Or $Q(0) \neq 0$, donc $a = n$. Et, nécessairement, $P = \lambda X^n (\lambda \in \mathbb{R})$.
Réciproquement, si $P = \lambda X^n$ alors :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}\lambda n X(1-X)X^{n-1} + \lambda X^{n+1} = \lambda X^n - \lambda X^{n+1} + \lambda X^{n+1} = P$$

Bref,

$$\mathcal{S}_1 = \operatorname{vect}\big(X^n\big)$$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et P solution de $\varphi(P) = \lambda P$, on a donc $\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP = \lambda P$.
Ainsi, $n(X-\lambda)P = X(X-1)P'$, donc $X \mid (X-\lambda)P$ et $(X-1) \mid (X-\lambda)P$.
Puis comme $\lambda \notin \{0,1\}, (X-\lambda)\wedge X = 1$ et $(X-\lambda)\wedge(X-1) = 1$.
Ainsi, d'après le lemme de Gauss : $X \mid P$ et $(X-1) \mid P$.
On note a et $b \geqslant 1$ les multiplicités de 0 et 1 respectivement comme racine de P.
Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$ et $Q(1) \neq 0$ tel que $P = X^a(X-1)^bQ$,
avec $a + b \leqslant n$.
On a alors $P' = aX^{a-1}(X-1)^bQ + bX^a(X-1)^{b-1}Q + X^a(X-1)^bQ'$.
En réinjectant cette relation dans (E_λ) :

$$\begin{aligned} n(X-\lambda)X^a(X-1)^bQ &= aX^a(X-1)^{b+1}Q + bX^{a+1}(X-1)^bQ + X^{a+1}(X-1)^{b+1}Q' \\ &= X^a(X-1)^b\big(a(X-1)Q + bXQ + X(X-1)Q'\big)\end{aligned}$$

Par régularité de $\mathbb{R}[X]$:

$$n(X-\lambda)Q = Q(a(X-1) + bX) + X(X-1)Q'$$

En substituant 0 (respectivement) à la place de X, on a les deux équations :

$$-n\lambda Q(0) = -aQ(0) \quad \text{et} \quad n(1-\lambda)Q(1) = bQ(1)$$

Or $Q(0) \neq 0$ et $Q(1) \neq 0$, donc $a = n\lambda$ et $b = n(1-\lambda)$ donc $a + b = n$.
Par ailleurs, on a vu que $a, b \in \mathbb{N}^*$, donc $a, b[\![1, n-1]\!]$ et $\lambda = \dfrac{a}{n}(b = n-a)$.
On a ainsi trouvé une condition sur λ pour que (E_λ) admette des solutions non nulles.

Faisons le calcul réciproque, en prenant $a \in [\![1, n-1]\!]$ puis $P_a = X^a(X-1)^{n-a}$ donc $P'_a = aX^{a-1}(X-1)^{n-a} + (n-a)X^a(X-1)^{n-a-1}$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(P_a) &= \frac{1}{n}\left[-aX^a(X-1)^{n-a+1} + (a-n)X^{a+1}(X-1)^{n-a}\right] + X^{a+1}(X-1)^{n-a}\\ &= \frac{1}{n}X^a(X-1)^{n-a}[-a(X-1)+(a-n)X+nX] = \frac{a}{n}P_a\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant les deux questions précédentes, l'équation (E_λ) n'admet de solutions non nulles que pour $\lambda \in \left\{\frac{k}{n}, k \in [\![0, n]\!]\right\}$ et $\mathcal{S}_\lambda = \text{vect}\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)$.

III.6 (a) En appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X+(1-X))^n = 1^n = 1$$

(b) Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$, en appliquant astucieusement le binôme de Newton :

$$X^\ell = X^\ell \times 1^{n-\ell} = X^\ell(X+(1-X))^{n-\ell} = X^\ell\sum_{k=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{k}X^{n-\ell-k}(1-X)^k = \sum_{k=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{k}X^{n-k}(1-X)^k$$

$$X^\ell = \sum_{k=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{k}T_{n-k} = \sum_{h=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{n-h}T_h = \sum_{h=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{h-\ell}T_h$$

où l'on a fait le changement de variable $h = n-k$

(c) Ainsi, tout vecteur $X^i \in \text{vect}\,\mathcal{T}$, donc $E = \text{vect}(\mathcal{B}) \subset \text{vect}\,\mathcal{T}$.
L'inclusion réciproque est évidente, puisque E est un espace vectoriel contenant tous les T_k.
Ainsi $E = \text{vect}\,\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une famille génératrice de E.
Cette famille est composée de $n+1 = \dim E$ vecteurs. C'est donc une famille génératrice minimale de E

$$\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots T_n) \text{ est une base de } E.$$

(d) D'après les questions 5 , on a pour tout $k \in [\![0, n]\!], \varphi(T_k) = \frac{k}{n}T_k$, et donc

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\varphi) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$$

(e) Comme A et B sont semblables, puisque toutes les deux sont des matrices du même endomorphisme φ, on attend ici la formule du changement de bases. Si on note alors $P = \mathcal{M}_{\mathcal{T},\mathcal{B}}(\text{id})$, matrice des composantes de $\mathcal{T}$, dans la base $\mathcal{B}$, et $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(\text{id})$, matrice des composantes de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{T}$, on a :

- $P \times Q = Q \times P = I_{n+1}$, ce sont les matrices inverses l'une de l'autre.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{T},\mathcal{B}}(\text{id}) \times \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(\text{id})$ et donc $A = P \times B \times Q$

- $P = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ (-1)^n\binom{n}{n} & \cdots & \cdots & \binom{0}{0} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \binom{n}{n} & \cdots & \cdots & \binom{0}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ n & & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(On retrouve le triangle de à partir de la pointe du bas à droite)

Puisque $T_k = X^k(1-X)^{n-k} = X^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i}(-1)^i X^i (1)^{n-k-i} = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i X^{i+k} = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{j-k}X^j$

Ainsi $T_0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}X^j$, $T_1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n-1}{j-1}X^j \dots$ et $T_n = X^n$.

III.7 (a) $X + (1-X) = 1$, donc d'après la réciproque de Bézout : $X \wedge (1-X) = 1$.
Puis d'après un corollaire du lemme de Gauss, $X \wedge (1-X)^{n-k} = 1$ et de nouveau : $X^k \wedge (1-X)^{n-k} = 1$.

(b) On peut alors appliquer le théorème de Bézout : $\exists (U_1, V_1) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $U_1X^k + V_1(1-X)^{n-k} = 1$.
Faisons la division euclidienne de V_1 par X, il existe $Q, V_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V_1 = QX^k + V_2$ avec $\deg V_2 < \deg X^k = k$.
Puis notons $U_2 = U_1 + Q(1-X)^{n-k}$, alors

$$U_2X^k + V_2(1-X)^{n-k} = \left(U_1 + Q(1-X)^{n-k}X^k + \left(V_1 - QX^k\right)(1-X)^{n-k} = U_1X^k + V_1(1-X)^{n-k} = 1$$

Enfin, $\deg\left(U_2X^k\right) = \deg U_2 + \deg X^k = k + \deg U_2$, mais comme $U_2X^k = 1 - V_2(1-X)^{n-k}$, $\deg U_2 + k \leqslant \deg V_2(1-X)^{n-k} = \deg V_2 + n - k < k + n - k = n$, et donc $\deg U_2 < n-k$.
Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité.
Supposons que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1 = U_2X^k + V_2(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$, Alors $(U - U_2)X^k = (V_2 - V)(1-X)^{n-k}$, et donc $X^k \mid (V_2 - V)(1-X)^{n-k}$. Or $X^k \wedge (1-X)^{n-k} = 1$, donc d'après le lemme de Gauss : $X^k \mid V_2 - V$, mais $\deg V_2 - v < k$, donc nécessairement $V_2 - V = 0$ et ainsi $V_2 = V$, puis $U - U_2 = 0$ et donc $U = U_2$.

Il existe donc un unique couple $(U, V) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$

(c) Divisons la relation précédente par T_k :

$$\frac{1}{T_k} = \frac{UX^k}{X^k(1-X)^{n-k}} + \frac{V(1-X)^{n-k}}{X^k(1-X)^{n-k}} = \frac{U}{(1-X)^{n-k}} + \frac{V}{X^k}$$

Ainsi comme $\deg V < k$, on peut noter $V = \sum_{j=0}^{k-1}[V]_jX^j$ et donc $\frac{V}{X^k} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{[V]_j}{X^{k-j}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{[V]_{k-i}}{X^i}$.
Il faudrait faire la même chose pour U, mais en le développant en somme de puissance de ($1-X$) à la place de X.
Notons $W = U \circ (1-X)$ (composition), puis notons que $\deg W < n-k$ et donc $W = \sum_{j=0}^{n-k}[W]_jX^j$.

On a alors en composant de nouveau par $(1-X)$ (puisque $(1-X)\circ(1-X) = 1-(1-X) = X$) :

$$\frac{U}{(1-X)^{n-k}} = \frac{W\circ(1-X)}{(1-X)^{n-k}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{[W]_j(1-X)^j}{(1-X)^{n-k}} = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{[W]_{n-k-i}}{(1-X)^i}$$

$$\text{Avec } W = U\circ(1-X),\ \text{on a } \frac{1}{T_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{[V]_{k-j}}{X^j} + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{[W]_{n-k-j}}{(1-X)^j}.$$

(d) Suivant l'indication, et en exploitant la 7 eme ligne du triangle de Pascal : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= (X+(1-X))^6 \\
&= X^6 + 6X^5(1-X) + 15X^4(1-X)^2 + 20X^3(1-X)^3 + 15X^2(1-X)^4 + 6X(1-X)^5 + (1-X)^6 \\
&= X^4 \underbrace{\left[X^2 + 6X(1-X) + 15(1-X)^2\right]}_{U} + (1-X)^3 \underbrace{\left[20X^3 + 15X^2(1-X) + 6X(1-X)^2 + (1-X)^3\right]}_{V}
\end{aligned}$$

On trouve donc $W = U\circ(1-X) = (1-X)^2 + 6(1-X)X + 15X^2 = 1-2X+X^2+6X-6X^2+15X^2 = 1+4X+10X^2$ et $V = 20X^3+15X^2-15X^3+6X-12X^2+6X^3+1-3X+3X^2-X^3 = 1+3X+6X^2+10X^3$.

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{X^4(1-X)^3} = \frac{1}{X^4} + \frac{3}{X^3} + \frac{6}{X^2} + \frac{10}{X} + \frac{1}{(1-X)^3} + \frac{4}{(1-X)^2} + \frac{10}{(1-X)}$$

Partie IV

IV.1 (a) Z_2 est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.
$Z_2 = 0$ ssi les deux tirages ont donné la même boule ssi le second tirage donne la même boule que le premier. Donc $\mathbf{P}(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{n}$.
Une autre façon de voir est de paramétrer les tirages en fonction du résultat du premier tirage. Il y a n^2 tirages possibles de 2 boules, parmi ceux n correspondent à un double tirage d'une même couleur.

$$Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

(b) Sachant que les k premiers tirages on conduit à obtenir j couleurs différentes, on peut modéliser que les tirages de la boule suivante sont équiprobables et raisonner par dénombrement. Il y a j possibilités pour obtenir une couleur déjà rencontrée et $n-j$ pour une couleur différente.

$$\mathbf{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}$$

Y_k est une variable aléatoire à valeurs dans $Y_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on peut appliquer la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Y_k = j\right) \times \mathbf{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Y_k = j\right) \times \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Y_k = j\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\mathbf{P}\left(Y_k = j\right)
\end{aligned}$$

On reconnait des résultats bien connus :

$$\mathbf{P}([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)$$

La variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} Z_i$ indique la nombre de fois où l'on obtenu une nouvelle couleur des tirages 1 à k. Autrement écrit, $\sum_{i=1}^{k} Z_k$ est le nombre de couleurs différentes rencontrées, jusqu'au k-ième tirage. C'est exactement Y_k. Donc $Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$ On a donc, par linéarité, $\mathbf{E}(Y_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(Z_i)$. Mais Z_i suit une loi de Bernoulli donc $\mathbf{E}(Z_i) = \mathbf{P}(Z_i = 1)$. On trouve donc

$$\mathbf{P}([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}\left(\left[Z_j = 1\right]\right)$$

(c) On va démontrer le résultat annoncé par récurrence forte. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_k :<$ $\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ ».

- On sait que $\mathbf{P}(Z_1 = 1) = 1$ et $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-1} = 1$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k$ sont vraies.

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}=1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}\left(\left[Z_j = 1\right]\right) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}$$

On a reconnu la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r = 1-\frac{1}{n}$, donc comme $1 - r = \frac{1}{n}$

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}=1)\, 1 - \frac{1}{n} \times \frac{1-r^k}{1-r} = 1 - \left(1-r^k\right) = r^k$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion :

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

(d) On a donc (avec la question (b)) :

$$\mathbf{E}(Y_k) = n\left(1 - \mathbf{P}(Z_{k+1}=1)\right) = n\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$$

IV.2 (a) On applique les formules

$$S_0 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_0 = i) X^i = 1X^0 + 0 = 1 \quad \text{et} \quad S_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_1 = i) X^i = 0 + 1X + 0 = X$$

Enfin, comme $Y_2 = Z_1 + Z_2$, $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et $\mathbf{P}(Y_2 = 2) = \mathbf{P}(Z_1 = 1 \cap Z_2 = 1) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) \times \mathbf{P}_{Z_1=1}(Z_2 = 1) = 1 \times \mathbf{P}(Z_2 = 1) = \frac{1}{n}$ car $Z_1 = 1$ est certain. ainsi $\mathbf{P}(Y_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_2 = 2) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}\left(Y_2 = i\right) X^i = \frac{1}{n} X + \frac{n-1}{n} X^2$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, n]\!]$ (La suite est vraie, même pour $k = 0$ ou $i = 0$, dans ce cas $\mathbf{P}\left(Y_k = -1\right) = 0$).
On exploite la variable aléatoire Y_k : $\left(\left[Y_k = j\right]\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}\left(\left[Y_{k+1} = i\right]\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(Y_k = j\right) \mathbf{P}_{Y_k = j}\left(Y_{k+1} = i\right)$$

Or :

- si $j \notin \{i-1, i\}, \mathbf{P}_{Y_k = j}\left(Y_{k+1} = i\right) = 0$;
- si $j = i$,

$$\mathbf{P}_{Y_k = i}\left(Y_{k+1} = i\right) = \frac{\mathbf{P}\left(Y_k = i \cap Y_{k+1} = i\right)}{\mathbf{P}\left(Y_k = i\right)} = \frac{\mathbf{P}\left(Y_k = i \cap Z_{k+1} = 0\right)}{\mathbf{P}\left(Y_k = i\right)} = \mathbf{P}_{Y_k = i}\left(Z_k = i\right) = \frac{i}{n}$$

  d'après 1.(b)
- si $j = i - 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{Y_k = i-1}\left(Y_{k+1} = i\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(Y_k = i-1 \cap Y_{k+1} = i\right)}{\mathbf{P}\left(Y_k = i-1\right)} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left(Y_k = i-1 \cap Z_{k+1} = 1\right)}{\mathbf{P}\left(Y_k = i-1\right)} = \mathbf{P}_{Y_k = i-1}\left(Z_k = i\right) = \frac{n-(i-1)}{n}\end{aligned}$$

  d'après 1.(b)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$: $\mathbf{P}\left(\left[Y_{k+1} = i\right]\right) = \dfrac{i}{n} \mathbf{P}\left(\left[Y_k = i\right]\right) + \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right) \mathbf{P}\left(\left[Y_k = i-1\right]\right)$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$, commençons par noter que si $i = n+1, 1 - \dfrac{i-1}{n} = 1 - 1 = 0$, donc on peut ajouter un terme à la dernière somme :

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}\left(Y_{k+1} = i\right) X^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} \mathbf{P}\left(\left[Y_k = i\right]\right)\right) X^i + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbf{P}\left(\left[Y_k = i-1\right]\right)\right) X^i \\ &= \frac{1}{n} X \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i \mathbf{P}\left(Y_k = i\right) X^{i-1}}_{\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = i) X^i\right)'} + X \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}\left(Y_k = i-1\right) X^{i-1}}_{\sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = h) X^h} - \frac{1}{n} X^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i-1) \mathbf{P}\left(Y_k = i-1\right) X^{i-2}}_{\left(\sum_{h=0}^{n+1} \mathbf{P}(Y_k = h) X^h\right)'} \\ &= \frac{1}{n} X S_k' + X S_k - \frac{1}{n} X^2 S_k' = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, S_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k$$

(d) La relation précédente indique directement, que pour tout $k \in \mathbb{N}, S_{k+1} = \varphi\left(S_k\right)$.
Ainsi, par récurrence immédiate : pour tout $k \in \mathbb{N}, S_k = \varphi^k\left(S_0\right)$

IV.3 (a) Avec les calculs trouvés en 2.(a), on a directement : $S_0(1)=1, S_1(1)=1, S_2(1)=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=1$.

La relation de récurrence qui lie S_{k+1} à S_k est : $S_{k+1}=\frac{1}{n}X(1-X)S_k'+XS_k$.

Donc en substituant 1 à X, on trouve : $S_{k+1}(1)=0\times S_k'(1)+S_k(1)=S_k(1)$.

Donc la suite $(S_k(1))$ est constante. Elle est égale à 1 , pour tout $k\in\mathbb{N}$ (normal!!).

Puis en dérivant cette relation, on trouve

$$S_{k+1}'=\frac{1}{n}(1-X)S_k'-\frac{1}{n}XS_k'+\frac{1}{n}X(1-X)S_k''+S_k+XS_k'$$

Donc en substituant 1 à X, on trouve : $S_{k+1}(1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)S_k'(1)+S_k(1)=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)S_k'(1)$

Ainsi, en notant $u_k=S_k'(1)$, (u_k) est une suite arithmético-géométrique, son point fixe est ℓ tel que $\ell=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\ell$, donc $\ell=1+\ell-\frac{1}{n}\ell$, donc $\ell=n$. On a alors $u_{k+1}-\ell=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k(u_0-\ell)$ avec $u_0=0$

$$\forall k\in\mathbb{N}, S_k(1)=1 \quad S_k'(1)=n-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=\mathbf{E}(Y_k)$$

(b) Puisque $S_k'(1)=\mathbf{E}(Y_k)$, on a donc retrouvé

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{E}(Y_k)=n-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$$

(c) Fixons k (nombre de tirages) et faisons tendre n vers l'infini (une infinité de couleur).

Alors $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\to 1$, il faut être plus précis : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1-\frac{k}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$\mathbf{E}(Y_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{nk}{n}=k \text{ - Tout les } k \text{ tirages conduisent à des couleurs différentes}$$

Fixons n (nombre de couleurs) et faisons tendre k vers l'infini (infinité de tirage).

Alors $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=\exp\left(k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\to 0$ par composition car $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$ et donc $k\ln\left(1-\frac{1}{n}\to-\infty\right.$, et donc

$$\mathbf{E}(Y_k)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} n \text{ - Toutes les } n \text{ couleurs ont été obtenues.}$$

IV.4 (a) En partie III.5., on a démontré que pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $\varphi(T_j)=\frac{j}{n}T_j$, et par récurrence très immédiate :

$$\varphi^k(T_j)=\left(\frac{j}{n}\right)^kT_j$$

(b) $S_k=\varphi^k(S_0)=\varphi^k(1)$. Or $1=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}T_j$, donc par linéarité de φ donc de φ^k :

$$S_k=\varphi^k\left(\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}T_j\right)=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}\varphi^k(T_j)=\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^kT_j$$

Il reste à écrire T_j sur la base canonique (cf. III.6.(e)) : $T_j = \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i$, donc

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

(c) L'écriture polynomiale est unique, on peut donc identifier, en exploitant également le fait que

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \frac{n!(n-j)!}{j!(n-j)!(i-j)!((n-j)-(i-j))!} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}([Y_k = i]) = [S_k]_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$