DEVOIR SURVEILLÉ 8

Durée : 2,4 « La cité de la peur ».

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Deux possibilités s'offrent à vous :

- Piste bleue : Problèmes 1, 2 et 3.
- Piste rouge : Problème 4.

Bon courage!

Problème 1

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0 , la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. A partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts;
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts;
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts;
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1. Calculer $E(A_1)$ et $V(A_1)$.
2. (a) Justifier que $A_2(\Omega) = [\![2,6]\!]$. Montrer que la loi de A_2 est donnée par :

$$P([A_2=2]) = \frac{1}{4}, P([A_2=3]) = \frac{1}{4}, P([A_2=4]) = \frac{5}{16}, P([A_2=5]) = \frac{1}{8}, P([A_2=6]) = \frac{1}{16}.$$

   (b) Calculer $E(A_2)$.
3. (a) Présenter dans un tableau la loi du couple (A_2, Z_2). En déduire la loi de Z_2 ainsi que l'espérance de Z_2.
   (b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(A_2, Z_2)$ de A_2 et Z_2. Les variables aléatoires A_2 et Z_2 sont-elles indépendantes?

4. Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n. Justifier que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.
5. (a) Justifier la relation : $X_n + Y_n + Z_n = n$. Calculer $\mathrm{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$.
   (b) En utilisant les valeurs de $V(X_n)$, $V(Y_n)$ et $V(X_n + Y_n)$, montrer que $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}$.
6. (a) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n. Montrer que $E(A_n) = \frac{7n}{4}$.
   (b) Exprimer A_n en fonction de X_n et Y_n. Calculer $V(A_n)$ et $\mathrm{Cov}(A_n, X_n)$.

Problème 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. (a) Montrer que $(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
   (b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.
   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ ta limite.
   (d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
   (e) En déduire que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.
   (a) Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.
   (b) En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.
   (c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. On pose pour tout entier naturel non nul n ; $\quad w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.
   (a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.
   (b) Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$ puis que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
   (c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $m_n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geqslant n\right\}$ et on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   (a) Justifier l'existence de m_n.
   (b) Etablir que $\exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}\right) \leqslant m_n < 1 + \exp\left(n - \gamma - \varepsilon_{m_n - 1}\right)$
   (c) En déduire un équivalent de m_n.
   (d) Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = e$.

Problème 3

Les parties I à IV de ce problème ne sont pas indépendantes : certaines questions peuvent faire appel à des résultats obtenus dans les parties précédentes.

Partie I

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On considère dans cette partie la matrice

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $M_{\mathcal{B}}(u) = J$.

I.1 Montrer que $u \circ u = \theta$.

I.2 (a) Déterminer le rang de u.

(b) En déduire la dimension et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

(c) Énoncer le théorème du rang (avec bien sûr toutes les hypothèses !).

(d) Calculer $u((-1,-2,1))$ et $u((0,1,-1))$. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

(e) $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

I.3 (a) Montrer que $\mathcal{B}' = ((-1,-2,1),(0,1,-1),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sans utiliser de matrice de passage, donner la matrice J' de u dans la base $\mathcal{B}'$.

(c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(d) Calculer P^{-1}.

(e) Donner le lien entre J, J' et P.

Partie II

On considère l'ensemble $\Delta = \{I_3 + mJ \mid m \in \mathbb{R}\}$.

II.1 Montrer que Δ est stable par multiplication, autrement dit que le produit de deux éléments de Δ est un élément de Δ.

II.2 Soit M une matrice de Δ et m le réel tel que $M = I_3 + mJ$.

(a) Exprimer M^2 est fonction de M et I_3.

(b) En déduire que M est inversible et donner l'inverse de M en fonction de M et I_3. Montrer que M^{-1} est un élément de Δ.

(c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de J et I_3.

Partie III

Nous allons résoudre dans cette partie l'équation matricielle $(E) : X^2 = M$ où X est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inconnue et M une matrice fixée dans Δ, distincte de I_3. On note m le réel non nul tel que $M = I_3 + mJ$.

III.1 Déterminer les solutions de (E) appartenant à Δ.

III.2 Vérifier que $P^{-1}MP = N$ avec $N = I_3 + mE_{1,3}$ où $E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III.3 Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$. Montrer que :

$$X^2 = M \iff Y^2 = N.$$

III.4 Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = N$.

Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $k = a$.

III.5 Résoudre l'équation $Y^2 = N$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On donnera l'ensemble des solutions en fonction de m. Cet ensemble contient un ensemble de matrices à deux paramètres ainsi que deux autres matrices.

III.6 Résoudre l'équation (E) (on pourra laisser les résultats sous la forme d'un produit matriciel).

Partie IV

Soit v un endomorphisme non nul d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v \circ v = \theta$, où θ désigne l'endomorphisme nul de E. On note r le rang de v et p la dimension du noyau de v.

IV.1 Montrer que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et en déduire que $r \leqslant n/2$ et $p \geqslant n/2$.

IV.2 Dans cette question on suppose que $n = 2$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v)$.

(b) Soit e_1 un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Im}(v)$ et e_2 un antécédent de e_1 par v. Montrer que (e_1, e_2) est une base de E et donner la matrice de v dans cette base.

IV.3 Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

(a) Montrer que $r = 1$. En déduire la valeur de p.

(b) En s'inspirant de la question précédente et de la première partie, déterminer une base de E dans laquelle la matrice de v est $E_{1,3}$.

Problème 4

Polynôme générateur associée à une variable aléatoire

Le but de ce problème est d'exploiter les polynômes générateurs associés aux variables aléatoires finies afin de faciliter les calculs et donc d'étendre les résultats connus en probabilité.

En seconde année, la méthode est étendus en prenant des polynômes de degré infini, c'est-à-dire des séries (formelles) génératrices ou des séries entières.

Le sujet est composé de quatre parties.

Dans la première, on démontre les résultats essentiels pour les polynômes générateurs.

En deuxième partie, on exploite ces résultats pour étudier une situation aléatoire particulière.

En troisième partie, on étudie une famille particulière de polynômes. Elle sera reprise associée à la nouvelle situation aléatoire étudiée en partie IV.

Dans tout ce problème, on notera $\mathbf{E}(U)$ l'espérance et $\mathbf{V}(U)$ la variance d'une variable aléatoire U.

Pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on notera $[P]_k$ ses coefficients, de sorte que $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} [P]_k X^k$.

Partie I : Préliminaires sur les polynômes générateurs

On fixe $n \in \mathbb{N}$.
On considère un espace de probabilité (fini) $(\Omega, \mathbf{P})$, fixé pour toute cette partie.
À toute variable aléatoire finie U à valeur dans $U(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, on associe le polynôme :

$$S_U = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U = k) X^k$$

I.1 Montrer que le polynôme générateur caractérise la loi. Autrement dit, montrer que deux variables aléatoires U et V ont la même loi si et seulement si $S_U = S_V$.

I.2 Série de résultat pour une variable aléatoire U.

(a) Que vaut $S_U(1)$? et $S'_U(1)$? Justifier votre réponse.

(b) Montrer que l'on a
$$\mathbf{V}(U) = S''_U(1) + S'_U(1)\left(1 - S'_U(1)\right)$$

I.3 Application.

(a) On suppose que U suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec $p \in [0, 1]$.
Que vaut S_U ? Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question 1.

(b) On suppose que U suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (avec $n \geqslant 3$).
Montrer que l'on peut écrire S_U sous la forme d'une (fausse) fraction rationnelle :
$$S_U = \frac{X - X^{n+1}}{n(1 - X)}$$
Évaluer $\lim_{t\to 1} S'_U(t)$ et $\lim_{t\to 1} S''_U(t)$.
Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question I.1.

I.4 Formule de transfert.

(a) Exprimer, grâce à la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}, \mathbf{E}\left(t^U\right)$ en fonction de $S_U(t)$.

(b) Exprimer $t \mapsto \mathbf{E}\left(U t^{U-1}\right)$ en fonction de $t \mapsto \mathbf{E}\left(t^U\right)$?
On parle bien de relation entre les *fonctions* ici.

(c) Retrouver les formules de la question 1. qui lient $\mathbf{E}(U)$ à S'_U et $\mathbf{V}(U)$ aux dérivées de S_U.

I.5 Montrer que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $S_{U+V} = S_U \times S_V$.

I.6 Suite de variables aléatoires.
On considère des variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots U_K \ldots$ indépendantes. Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, on note $V_K = \sum_{i=1}^{K} U_i$.

(a) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_{V_K} = \prod_{i=1}^{K} S_{U_i}$. On pourra procéder par récurrence sur K et utiliser le résultat de la question I.5.
Que se passe-t-il si toutes les variables $U_1, \ldots U_K$ suivent une même loi, celle de U ?

(b) Soit N une variable aléatoire fini à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note $W = \sum_{i=1}^{N} U_i$, variable aléatoire dont le nombre de termes additionnés dépend de la variable aléatoire N.
On suppose que toutes les variables $U_1, \ldots U_k$ suivent une même loi, celle de U.
Exprimer S_W comme la composition de deux polynômes.

Dans la suite du problème, on dit que les variables $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ sont des variables i.i.d - indépendantes et identiquement distribuées, lorsqu'elles sont indépendantes et qu'elles suivent toutes la même loi.

Partie II : Application au calcul des valeurs prises par une somme de v.a

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, un entier fixé. On considère une probabilité μ définie sur $\{1, \dots N\}$ (i.e. $\sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!], \mu(k) \geqslant 0$) telle que $\mu(1) \in]0,1[$. On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et identiquement distribué de loi μ, i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \mu(k)$$

On définit $M_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$M_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

II.1 On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n, l'évènement « $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $M_k = n$ » .

(a) Que valent $\mathbf{P}(A_0)$ et $\mathbf{P}(A_1)$?

(b) Montrer, très précisément, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{\min(n,N)} \mu(k)\mathbf{P}(A_{n-k})$$

(c) On suppose dans cette question que $N \geqslant 2$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(A_2)$, en fonction de $\mu(1)$ et de $\mu(2)$

Pour les prochaines questions, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$. On considère la variable aléatoire U à valeurs dans $[\![0, m+N+1]\!]$ tel que :

- pour tout $k \in [\![0, m+N]\!]$, $\quad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(A_k)$.
- pour $k = m+N+1$,

$$\mathbf{P}(U = m+N+1) = 1 - \sum_{k=0}^{m+N} \mathbf{P}(A_k)$$

On dit que U est une variable aléatoire tronquée.

Comme en première partie, on définit $S_U = \sum_{k=0}^{m+N+1} \mathbf{P}(U = k)X^k$, le polynôme générateur associé U.

On note également $S_\mu = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)X^k$, le polynôme générateur de chacune des variables aléatoires X_i (c'est bien le même pour chacune des variables puisqu'elles ont la même loi!).

II.2 Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S_\mu \times S_U = S_U + X^{m+N}Q - 1$

II.3 Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 - S_\mu}$ admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles éventuels sont de module strictement supérieur à 1 .

II.4 En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1 - S_\mu}$ établir que $\mathbf{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.

On pourra démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*, \exists Q_z \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{X}{z}\right)^k} = \sum_{i=0}^{m+N} \binom{k+i-1}{i} \frac{1}{z^i} X^i + \frac{X^{m+N}}{\left(1 - \frac{X}{z}\right)^k} Q_z$$

Partie III : Famille de polynômes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

III.1 Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.2 Exprimer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que le rang de φ vaut n.

III.3 L'endomorphisme φ est-il injectif? Justifier votre réponse.

III.4 Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\left((X-1)^n\right)$.

III.5 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation (E_λ) d'inconnue $P \in E$:

$$\varphi(P) = \lambda P$$

On notera $\mathcal{S}_\lambda$ l'ensemble des solutions de l'équation (E_λ).

(a) Donner, sans calcul supplémentaire, les solutions de (E_0).

(b) Déterminer $\mathcal{S}_1$.

(c) On suppose que $\lambda \notin \{0, 1\}$. Montrer que l'équation (E_λ) n'admet de solutions non nulles que pour $\lambda \in \left\{\frac{k}{n}, k \in [\![0, n]\!]\right\}$ et que dans ce cas, $\mathcal{S}_\lambda = \operatorname{vect}\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)$.

III.6 On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T_k = X^k(1-X)^{n-k}$

(a) Évaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$

(b) Montrer, de même que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, X^ℓ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, (combinaison linéaire que l'on explicitera).
On pourra remarquer que $X^\ell = X^\ell \times 1^{n-\ell} = X^\ell\left(X + (1-X)\right)^{n-\ell}$.

(c) En déduire que $\mathcal{T} = (T_0, T_1, \ldots T_n)$ est une base de E.

(d) Écrire la matrice B de φ dans la base $\mathcal{T}$

(e) Expliciter des matrices P et Q telles que $A = P \times B \times Q$. Quelle relation simple existe-t-il entre P et Q?

III.7 On chercher à décomposer $\dfrac{1}{T_k}$ en éléments simples. Pour cela nous allons procéder d'une façon un peu originale.

(a) Montrer que les polynômes X^k et $(1-X)^{n-k}$ sont premiers entre eux.

(b) Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$.

(c) Donner l'expression (en fonction de U) d'un polynôme W tel que

$$\frac{1}{T_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{[V]_{k-j}}{X^j} + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{[W]_{n-k-j}}{(1-X)^j}$$

(d) Application : donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^4(1-X)^3}$.

Partie IV : Tirage de boules colorées

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules de n couleurs différentes, indiscernable au toucher.
On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega; \mathbf{P})$.
On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules distinctes qui ont été tirées lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose $Y_0 = 0$.

IV.1 On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, Z_k$, la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène une nouvelle couleur i.e. une boule qui n'a pas été tirée lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarque en particulier que $Z_1 = 1$.

(a) Déterminer la loi de Z_2

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbf{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
En déduire $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)$ puis $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}\big([Z_j = 1]\big)$

(c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

(d) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

IV.2 On note pour tout $k \in \mathbb{N}, S_k$ (plutôt que S_{Y_k}) le polynôme générateur associé à Y_k :

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = i)\, X^i = \mathbf{E}\left(X^{Y_k}\right)$$

(a) Déterminer les polynômes S_0, S_1 et S_2.

(b) Montrer, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}([Y_k = i-1])$$

(c) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\qquad S_{k+1} = \dfrac{1}{n}X(1-X)S_k' + XS_k$.

(d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \varphi^k(S_0)$, où φ a été définie en partie III.

IV.3 (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $S_k(1)$ et $S_k'(1)$.

(b) Retrouver alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ obtenue en question 1.(e)

(c) Calculer et interpréter $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_k)$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \mathbf{E}(Y_k)$.

IV.4 (a) En exploitant les résultats obtenus en partie III, ou bien en faisant directement le calcul, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\qquad \varphi^k(T_j) = \left(\dfrac{j}{n}\right)^k T_j$

(b) En déduire, à l'aide de la formule trouvée en III.6.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

(c) Montrer, finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k$$