

## CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 7

### Exercice 1 –

1. La base canonique de  $\mathbb{R}^4$  est  $\mathcal{B} = \left( (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \right)$ .

La base canonique de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  est

$\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$  où  $E_{i,j}$  désigne la matrice élémentaire où tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la  $i$ -ième ligne et  $j$ -ième colonne qui vaut 1.

La base canonique du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}_3[X]$  est  $\mathcal{F} = (1, X, X^2, X^3)$ .

2.  $\triangleright$  Déjà,  $F$  est une partie de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
 $\triangleright$  La fonction nulle est bien  $2\pi$ -périodique donc elle appartient à  $F$ .  
 $\triangleright$  Soient  $f$  et  $g$  deux vecteurs de  $F$  et  $\lambda$  un nombre réel. On pose  $h = \lambda f + g$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} h(x+2\pi) &= \lambda f(x+2\pi) + g(x+2\pi) && \text{par définition de } h \\ &= \lambda f(x) + g(x) && \text{parce que } f \text{ et } g \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques} \\ &= h(x) && \text{par définition de } h \end{aligned}$$

donc  $h$  est  $2\pi$ -périodique donc  $\lambda f + g \in F$ .

$F$  est bien un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

3. On remarque que  $F$  est une partie de  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . On a

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x - y + \boxed{1}z &= 0 \\ x &+ z + \boxed{-1}t &= 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = \lambda(1, 0, -1, 0) + \mu(0, 1, 1, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v) \quad \text{où l'on a posé } u = (1, 0, -1, 0) \text{ et } v = (0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

donc  $F = \text{Vect}(u, v)$ . Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

Les vecteurs  $u$  et  $v$  n'étant pas colinéaires, la famille  $(u, v)$  est libre, et comme elle est génératrice de  $F$ ,

la famille  $(u, v)$  est une base de  $F$ , où l'on a posé  $u = (1, 0, -1, 0)$  et  $v = (0, 1, 1, 1)$ .

4. Il s'agit de montrer que toute suite  $u$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  se décompose de manière unique en la somme d'une suite  $v$  dans  $F$  et d'une suite  $w$  dans  $G$ . On raisonne par analyse-synthèse. On considère une suite  $u$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

▷ Analyse : Soient  $v \in F$  et  $w \in G$ . On suppose que  $u = v + w$ . Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$ .
- $v_0 = 0$ .
- $w$  est géométrique de raison 3 donc pour tout  $n \in \mathbb{N}, w_n = 3^n w_0$ .

On a donc  $u_0 = v_0 + w_0 = w_0$ . Ainsi, la suite  $w$  est unique et déterminée par  $u$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3^n u_0$ . La relation  $u = v + w$  impose alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3^n u_0$  donc  $v$  est également unique et déterminée par  $u$ .

▷ Synthèse : On considère les suites  $v$  et  $w$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 3^n u_0 \quad \text{et} \quad w_n = 3^n u_0$$

- On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$ .
- $v_0 = u_0 - 3^0 u_0 = u_0 - u_0 = 0$  donc  $v \in F$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 3^{n+1} u_0 = 3 \times 3^n u_0 = 3w_n$  donc  $w \in G$ .

Ceci prouve que  $u$  se décompose de manière unique en la somme  $v + w$  d'un vecteur  $v$  de  $F$  et d'un vecteur  $w$  de  $G$ . Finalement,

$F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

5. Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels. On suppose que

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient  $\begin{pmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  et  $z = 0$ . Donc  $x = y$  et  $2x = x + x = x + y = 0$  donc  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . Finalement,

cette famille de matrices est libre.

6. (a) Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ .

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(2) = P'(2) = 0 \\ &\iff \text{« 2 est racine au moins double de } P \text{»} \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X-2)^2 Q \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, P = (X-2)^2 (aX + b) \\ &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, P = aX(X-2)^2 + b(X-2)^2 \\ &\iff P \in \text{Vect}(X(X-2)^2, (X-2)^2) \end{aligned}$$

donc  $F = \text{Vect}(X(X-2)^2, (X-2)^2)$ . Ainsi, la famille  $(X(X-2)^2, (X-2)^2)$  est génératrice de  $F$  et c'est une famille libre car elle est constituée de deux polynômes non-nuls de degré distincts. Ainsi,  $(X(X-1)^2, (X-2)^2)$  est une base de  $F$  donc

$F$  est de dimension 2.

- (b) ▷ On sait déjà que le polynôme nul  $\theta$  appartient à  $F \cap \mathbb{R}_1[X]$  donc  $\{\theta\} \subset F \cap \mathbb{R}_1[X]$ .  
 ▷ Soit  $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$ . Alors il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $P = aX + b$ . On a donc  $P' = a$ . Comme  $P(2) = 0$  et  $P'(2) = 0$ , on obtient  $2a + b = 0$  et  $a = 0$ . Donc  $b = 0$  et finalement  $P = \theta$ . Ainsi,  $F \cap \mathbb{R}_1[X] \subset \{\theta\}$ .

En conclusion,  $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{\theta\}$  donc  $F$  et  $\mathbb{R}_1[X]$  sont en somme directe.

(c) On a  $\dim(F) + \dim(R_1[X]) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$  et  $F$  et  $\mathbb{R}_1[X]$  sont en somme directe donc

$$F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_3[X].$$

7. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Problème 1 – Partie I**

1.  $F$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Ainsi, c'est un **espace vectoriel**. Par ailleurs, on remarque que  $v_1 = 2v_2 - v_3$ . Ainsi,  $F = \text{Vect}(v_2, v_3)$ . La famille  $(v_2, v_3)$  est donc **génératrice de  $F$** .

On vérifie qu'elle est libre (par la définition ou en précisant qu'elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires). Il s'agit donc d'une **base de  $F$** .

Conclusion :  $F$  est un espace vectoriel et  $(v_2, v_3)$  en est une base.

2. On a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t - y + z - 2t = 0 \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 2z - t \text{ et } x = z + t\} \\ &= \{(z + t, 2z - t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(1, 2, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $G = \text{Vect}((1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$  donc  $G$  est un **espace vectoriel** et  $((1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$  est une **famille génératrice** de  $G$ . Comme cette famille est constituée de deux vecteurs non colinéaires, elle est **libre**.

Conclusion :  $G$  est un espace vectoriel dont une base est  $((1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$ .

3. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (x, y, z, t) = av_2 + bv_3 = (2a + 3b, a + 3b, -2b, a + b) \\ x - y + z - 2t = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (x, y, z, t) = (2a + 3b, a + 3b, -2b, a + b) \\ (2a + 3b) - (a + 3b) + (-2b) - 2(a + b) = 0 \\ (2a + 3b) - (-2b) - (a + b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (x, y, z, t) = (2a + 3b, a + 3b, -2b, a + b) \\ a = -4b \end{cases} \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R} / (x, y, z, t) = (-4b)v_2 + bv_3 = b(-4v_2 + v_3) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(-4v_2 + v_3) \end{aligned}$$

Ainsi,  $F \cap G = \text{Vect}(-4v_2 + v_3)$  (c'est donc un espace vectoriel!) et  $-4v_2 + v_3 = (-5, -1, -2, -3)$  est un vecteur non nul qui en forme une **famille génératrice**, c'en est donc une base.

Conclusion :  $(-5, -1, -2, -3)$  forme une **base de  $F \cap G$** .

**Partie II**

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a :

- $E_k \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui est un espace vectoriel de référence.
- $0_3 \in E_k$  car  $A^k 0_3 = 0_3 = A^{k-1} 0_3$ .
- Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(M, N) \in E_k^2$ . On a, en utilisant les propriétés de distributivité dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et le fait que  $M$  et  $N$  soient des éléments de  $E_k$  :

$$A^k(\lambda M + N) = \lambda A^k M + A^k N = \lambda A^{k-1} M + A^{k-1} N = A^{k-1}(\lambda M + N)$$

Ainsi,  $\lambda M + N \in E_k$ .

Conclusion :  $E_k$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. (a) On a  $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}$ .

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

$$M \in E_1 \iff \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = d \\ e = b \\ c = f \\ g = d \\ h = e \\ f = i \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases}.$$

Conclusion :  $E_1 = \{0_3\}$ .

(b)  $E_2 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^2 M = AM\}$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On a :

$$M \in E_2 \iff \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} g = d \\ h = e \\ i = f \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases} \iff d = e = f = g = h = i = 0 \text{ et}$$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Ainsi,

$$M \in E_2 \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff M \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Donc, } E_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les trois matrices précédentes forment donc une **famille génératrice** de  $E_2$ .

Montrons que cette famille est libre. Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . La famille est donc **libre**. Elle constitue une **base de  $E_2$** .

3. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $M \in E_k$ . On a alors  $A^k M = A^{k-1} M$ . Ainsi,

$$A^{k+1} M = (AA^k) M = A(A^k M) = A(A^{k-1} M) = (AA^{k-1}) M = A^k M$$

où l'on a utilisé plusieurs fois l'associativité du produit matriciel. Donc  $M \in E_{k+1}$ .

Conclusion : Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  **$E_k \subset E_{k+1}$** .

4. Supposons que  $A$  soit inversible. Montrons que  $E_{k+1} \subset E_k$ . Soit  $M \in E_{k+1}$ . On a donc  $A^{k+1} M = A^k M$ . Comme  $A$  est inversible, elle admet une matrice inverse  $A^{-1}$ . En multipliant par cette inverse à gauche dans l'égalité précédente, il vient :

$$A^{-1}(A^{k+1} M) = A^{-1}(A^k M)$$

Et donc, en utilisant l'associativité du produit matriciel,

$$(A^{-1}A^{k+1}) M = (A^{-1}A) A^k M = A^k M \quad \text{et} \quad A^{-1}(A^k M) = (A^{-1}A) A^{k-1} M = A^{k-1} M$$

d'où  $A^k M = A^{k-1} M$  et donc  $M \in E_k$ . Donc  $E_{k+1} \subset E_k$ . Et comme d'après la question précédente,  $E_k \subset E_{k+1}$ , on peut conclure.

Conclusion : Si  $A$  est inversible, alors  **$E_k = E_{k+1}$** .

### Partie III

1. (a) i. Soit  $q \neq 1$ , soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{k=1}^{n-1} kq^k &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^n (i-1)q^i \quad \text{en posant dans la deuxième somme } i = k+1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^n iq^i + \sum_{i=2}^n q^i \\ &= q + \sum_{k=2}^{n-1} kq^k - \sum_{i=2}^{n-1} iq^i - nq^n + q^2 \frac{1-q^{n-2+1}}{1-q} \\ &= q - nq^n + q^2 \frac{1-q^{n-2+1}}{1-q} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $q \neq 1$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^k = \frac{q}{1-q} - n \frac{q^n}{1-q} + q^2 \frac{1-q^{n-2+1}}{(1-q)^2}.$$

ii. En utilisant la question précédente avec  $q = \frac{1}{2} \neq 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 - n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 1 - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

(b) Redémontrons cette égalité par récurrence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\mathcal{P}(n) : \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ .

**Initialisation** Pour  $n = 1$ , on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \quad \text{et} \quad 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

**Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. On a alors, on utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (-2(n+1) + n) \\ &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2(-2(n+1) + n) \\ &= 2 - 2(n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

2. Montrons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On a :

- $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$  car  $4 \times 0 = 8 \times 0 - 5 \times 0 + 0$ .
- Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et,  $(u, v) \in \mathbb{R} \times F^2$ , montrons que  $\lambda u + v \in F$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} 4(u + \lambda v)_{n+3} &= 4u_{n+3} + \lambda 4v_{n+3} \\ &= 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n + \lambda (8v_{n+2} - 5v_{n+1} + v_n) \quad \text{car } (u, v) \in F^2 \\ &= 8(u_{n+2} + \lambda v_{n+2}) - 5(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + (u_n + \lambda v_n) \\ &= 8(u + \lambda v)_{n+2} - 5(u + \lambda v)_{n+1} + (u + \lambda v)_n \end{aligned}$$

On a donc  $u + \lambda v \in F$ .

Conclusion :  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Montrons que  $a \in F$ . Rappelons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 \text{ et } 4 = 8 - 5 + 1$$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}, 4a_{n+3} = 8a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n$ , donc  $a \in F$ .

De même montrons que  $b \in F$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}.$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 4b_{n+3} = 8b_{n+2} - 5b_{n+1} + b_n$ , donc  $b \in F$ .

Enfin, montrons que  $c \in F$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} 8(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^n &= 16n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 20\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 8n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \\ &= 4(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 4c_{n+3} = 8c_{n+2} - 5c_{n+1} + c_n$ , donc  $c \in F$ .

3. Montrons que la famille  $(a, b, c)$  est une famille libre de  $F$ .

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ . On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}, \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_3 n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

**Méthode 1 :** prendre successivement  $n = 0, n = 1$  et  $n = 2$  pour avoir un système que l'on résout, on trouve que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

**Méthode 2 :**  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et par croissance comparée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_3 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \lambda_1 \text{ et on obtient } \lambda_1 = 0.$$

On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}, \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_3 n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ . En prenant  $n = 0$ , on obtient  $\lambda_2 = 0$ .

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}, \lambda_3 n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et on obtient  $\lambda_3 = 0$ .

Conclusion : La famille  $(a, b, c)$  est libre.

4. (a) i. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$4v_{n+1} - v_n = 4(u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+1} + u_n = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n.$$

Or  $u \in F$  donc  $4u_{n+3} = 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n$ . Ainsi :

$$4u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n = 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n - 4u_{n+2} = 4u_{n+3} - 4u_{n+2} = 4v_{n+2}.$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, 4v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n$ , donc  $v \in G$ .

ii. L'ensemble  $G$  est l'ensemble des suites vérifiant la relation linéaire de récurrence d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n.$$

On résout l'équation caractéristique associée à cette relation :

$$4r^2 = 4r - 1 \iff 4r^2 - 4r + 1 = 0 \iff 4\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff r = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après le cours, on a donc :

$$v \in G \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Conclusion :  $v$  est combinaison linéaire de  $b$  et  $c$ .

iii. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En sommant pour  $k = 0$  à  $n - 1$  la relation (\*), on a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$$

Donc  $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ .

Montrons maintenant que  $u$  est combinaison linéaire des suites  $a, b$  et  $c$ .

On a montré que pour tout entier  $n$  non nul,  $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$  et qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tels que pour tout entier  $n$ ,  $v_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . On a donc, par linéarité de la somme :

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^k + \mu k \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = u_0 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \mu \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ainsi, en utilisant la question préliminaire pour tout entier  $n$  non nul,

$$u_n = u_0 + \lambda \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \mu \left( 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \right),$$

donc

$$u_n = u_0 + 2\lambda - 2\lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\mu - 2\mu(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Cette formule reste valable pour  $n = 0$ .

Conclusion :  $u = (u_0 + 2\lambda + 2\mu)a - (2\lambda + 2\mu)b - 2\mu c$ , la suite  $u$  est donc bien combinaison linéaire de  $a, b$  et  $c$ .

(b) On a bien montré que la famille  $(a, b, c)$  est aussi une famille génératrice de  $F$ . Elle forme donc une base de  $F$ .

**Problème 2 –**

1. (a) Soit  $n \geq 2$  un entier. Les événements  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$  forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n).$$

Or, d'après l'énoncé,  $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}, P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$  et  $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{D_n}(A_{n+1}) = 0$ . Ainsi,

$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n).$$

(b) De même, on a :

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{1}{3}P(D_n);$$

$$P(C_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n);$$

$$P(D_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{2}{3}P(D_n).$$

- (c) À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet  $A$ . Donc  $P(A_0) = 1$ , et  $P(B_0) = P(C_0) = P(D_0) = 0$ . Par ailleurs, d'après l'énoncé, à l'instant 1, la puce se trouve sur le sommet  $A$  avec une probabilité  $\frac{2}{3}$  et sur le sommet  $C$  avec une probabilité  $\frac{1}{3}$ , i.e  $P(A_1) = \frac{2}{3}$  et  $P(C_1) = \frac{1}{3}$ . On a donc également  $P(B_1) = P(D_1) = 0$ . Dès lors, on a bien :

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}P(A_0) + \frac{1}{2}P(B_0); \\ P(B_1) &= 0 = \frac{1}{2}P(C_0) + \frac{1}{3}P(D_0); \\ P(C_1) &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P(A_0) + \frac{1}{2}P(B_0); \\ P(D_1) &= 0 = \frac{1}{2}P(C_0) + \frac{2}{3}P(D_0). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) + P(D_1 \cap A_2).$$

Comme,  $P(B_1) = P(D_1) = 0$ , on a  $P(B_1 \cap A_2) = P(D_1 \cap A_2) = 0$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P_{A_1}(A_2)P(A_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}; \\ P(C_1 \cap A_2) &= P_{C_1}(A_2)P(C_1) = 0 \times \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(A_2) = \frac{4}{9}$ . De même, on peut montrer que  $P(B_2) = \frac{1}{6}$ ,  $P(C_2) = \frac{2}{9}$  et  $P(D_2) = \frac{1}{6}$ . Et donc, on a bien :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{4}{9} = \frac{2}{3}P(A_1) + \frac{1}{2}P(B_1); \\ P(B_2) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(C_1) + \frac{1}{3}P(D_1); \\ P(C_2) &= \frac{2}{9} = \frac{1}{3}P(A_1) + \frac{1}{2}P(B_1); \\ P(D_2) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(C_1) + \frac{2}{3}P(D_1). \end{aligned}$$

Donc, les relations précédentes sont encore valables pour  $n = 1$  et  $n = 0$ .

- (d) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les événements  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  forment un système complet d'événements, et donc

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1.$$

2. D'après les relations établies précédemment, on a :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n); \\ P(B_{n+1}) &= \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{1}{3}P(D_n); \\ P(C_{n+1}) &= \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n). \end{aligned}$$

Or,

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1.$$

Donc,

$$P(D_n) = 1 - P(A_n) - P(B_n) - P(C_n).$$

Et donc,

$$P(B_{n+1}) = -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3}.$$

Dès lors,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \\ -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{aligned} AU_n + B &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \\ -\frac{1}{3}P(A_n) - \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) \end{pmatrix} \\ &= U_{n+1}. \end{aligned}$$

3. (a) Posons  $L = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\begin{aligned} L = AL + B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b \\ b = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c + \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_2 - L_3 + L_2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{5}{6}b + \frac{5}{6}c = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + c = 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{5}{6}b + \frac{5}{6}c = \frac{1}{3} \\ -b + c = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{6}{5}L_2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{5}{6}b + \frac{5}{6}c = \frac{1}{3} \\ +2c = \frac{2}{5} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Et donc, l'unique vecteur  $L$  qui vérifie  $L = AL + B$  est  $L = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ .

(b) Notons  $\mathcal{P}_n$  la proposition «  $U_n = A^n(U_0 - L) + B$  ».

**Initialisation** ( $n = 0$ ) :

$A^0(U_0 - L) + L = I_3(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$  donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité** : Soit  $n$  un entier quelconque dans  $\mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. D'après ce qui précède, on sait que  $L = AL + B$  et que  $U_{n+1} = AU_n + B$ . D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que  $U_n = A^n(U_0 - L) + L$  donc on en déduit que :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A(A^n(U_0 - L) + L) + B = A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(U_0 - L) + L.$$

Donc,  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

4. (a) Calculons  $RQ$  :

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I_3.$$

Ainsi,  $R$  est inversible, et

$$R^{-1} = \frac{1}{10}Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

(b) Calculons  $CR - RD$  :

$$\begin{aligned} CR - RD &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Notons  $\mathcal{P}_n$  la proposition : «  $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}$  ».

**Initialisation** ( $n = 0$ ) :  $A^0 = I_3$  et  $\left(\frac{1}{6}\right)^0 RD^0 R^{-1} = 1 \times RI_3 R^{-1} = RR^{-1} = I_3$  donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité** : Soit  $n$  un entier quelconque dans  $\mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. D'après ce qui précède,  $CR = RD$  et  $R$  est inversible, donc  $C = RDR^{-1}$ . Par ailleurs,  $C = 6A$  donc  $A = \frac{1}{6}RDR^{-1}$ . D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que  $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}$ , donc on en déduit que :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1} \times \frac{1}{6}RDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} \times RD^n R^{-1} RDR^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^n I_3 DR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1} R^{-1} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}.$$

5. Calculons  $A^n$  grâce à la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} A^n &= \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & (-2)^n & 3^{n+1} \\ -1 & (-2)^{n+1} & -3^n \\ -1 & -(-2)^{n+1} & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5} + \frac{2 \times 3^{n+1}}{5} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^{n+1}}{5} + \frac{3^{n+2}}{10} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^n}{5} + \frac{3^{n+1}}{10} \\ \frac{(-2)^{n+1}}{5} - \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{(-2)^{n+2}}{5} - \frac{10}{3^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{(-2)^{n+1}}{5} - \frac{10}{3^n} \\ \frac{(-2)^{n+1}}{5} + \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{10} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5} + \frac{2 \times 3^{n+1}}{(-2)^{n+1} - 2 \times 3^n} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^{n+1}}{5} + \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^n}{5} + \frac{3^{n+1}}{3^n} \\ -\frac{5}{(-2)^{n+1}} - \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{5}{(-2)^{n+2}} - \frac{10}{3^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{5}{(-2)^{n+1}} - \frac{10}{3^n} \\ \frac{5}{(-2)^{n+1}} + \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{3^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{5} + \frac{2 \times 3^{n+1}}{(-2)^{n+1} - 2 \times 3^n} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^{n+1}}{5} + \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} & -\frac{1}{2} + \frac{(-2)^n}{5} + \frac{3^{n+1}}{3^n} \\ -\frac{5}{(-2)^{n+1}} - \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} + \frac{5}{(-2)^{n+2}} - \frac{10}{3^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{5}{(-2)^{n+1}} - \frac{10}{3^n} \\ \frac{5}{(-2)^{n+1}} + \frac{5}{2 \times 3^n} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{3^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{5}{5} + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{(-2)^n}{10} + \frac{3^{n+1}}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{10}{(-2)^{n+1}} - \frac{5}{3^n} - \frac{1}{5} \\ -\frac{10}{(-2)^{n+1}} + \frac{5}{3^n} - \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \left(\frac{-2}{6}\right)^n + \frac{3}{5} \left(\frac{3}{6}\right)^n + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ -\frac{10}{2} \left(\frac{-2}{6}\right)^n - \frac{1}{5} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{10} \left(\frac{-2}{6}\right)^n + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Enfin, on a vu à la question 1.(d) que  $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$ . Donc,

$$P(D_n) = 1 - (P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)) = \dots$$

**Problème 3 –**

**Partie A**

1. Soit  $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ . On a :

- $S_P \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par définition de  $S_P$  ;
- la fonction nulle est solution de  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$  donc  $S_P \neq \emptyset$  ;
- Soient  $(y_1, y_2) \in S_P^2$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
 &a_n(\lambda y_1 + y_2)^{(n)} + \dots + a_1(\lambda y_1 + y_2)' + a_0(\lambda y_1 + y_2) \\
 &= \lambda \underbrace{(a_n y_1^{(n)} + \dots + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{=0} + \underbrace{(a_n y_2^{(n)} + \dots + a_1 y_2' + a_0 y_2)}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc,  $S_P$  est stable par combinaison linéaire.

Donc,  $S_P$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

2. Soit  $r \in \mathbb{C}$ . Soit  $y \in S_{X-r}$ . Alors,  $y$  est solution de  $y' - r y = 0$ . Donc, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $y = \lambda e_r$  donc  $y \in \text{Vect}(e_r)$ .

Réciproquement, si  $y \in \text{Vect}(e_r)$  alors il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $y = \lambda e_r$ . Alors,  $y' = \lambda r e_r = r y$  donc  $y$  est solution de  $y' - r y = 0$ , i.e  $y \in S_r$ .

Ainsi, on a bien  $S_{X-r} = \text{Vect}(e_r)$ .

3. (a) D'après la question précédente, on a  $S_{X-1} = \text{Vect}(e_1)$  et  $S_{X-2} = \text{Vect}(e_2)$ .  
Par ailleurs, exprimons les solutions de  $y'' - 3y' + 2y = 0$ , i.e les éléments de  $S_{X^2-3X+2}$ .  
Notons tout d'abord que les racines de  $X^2 - 3X + 2$  sont 1 et 2.  
Soit  $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On a :

$$\begin{aligned} y \in S_{X^2-3X+2} &\iff y'' - 3y' + 2y = 0 \\ &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad y = \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &\iff y \in \text{Vect}(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Ainsi,  $S_{X^2-3X+2} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Or,  $(e_1, e_2)$  forme une famille libre, puisque ce sont deux vecteurs non nuls, et non colinéaires. Ainsi,  $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$ .

On a donc bien montré que  $S_{X^2-3X+2} = S_{X-1} \oplus S_{X-2}$ .

- (b) L'équation homogène a été résolue à la question précédente. On cherche une solution particulière sous la forme  $y_{SP} = B e_4$ . Alors,

$$\begin{aligned} y_{SP} \text{ est solution} &\iff y_{SP}'' - 3y_{SP}' + 2y_{SP} = e_4 \\ &\iff 16B e_4 - 12B e_4 + 2B e_4 = e_4 \\ &\iff 6B e_4 = e_4 \\ &\iff B = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{1}{6} e_4$  est solution particulière.

La forme générale des solutions de l'équation différentielle est alors

$$x \longmapsto \frac{1}{6} e_4 + \lambda e_1 + \mu e_2 \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Autrement dit,

$$\{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' - 3y' + 2y = e_4\} = \frac{1}{6} e_4 + \text{Vect}(e_1, e_2)$$

On a donc bien un sous-espace affine de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  de direction  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ , dont  $(e_1, e_2)$  est une base puisqu'il s'agit d'une famille libre (comme démontré à la question précédente) et évidemment génératrice.

4. Soit  $r \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  des scalaires. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k e^{rx} = 0$$

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{rx} \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = 0$ . Or,  $e^{rx} \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$$

Donc, le polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  admet une infinité de racines. Il s'agit donc du polynôme nul et donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k = 0$ . Donc, la famille  $\left( x \longmapsto x^k e^{rx} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est libre pour tout  $r \in \mathbb{C}$ .

5. (a) On note  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  de sorte que  $(X - r)P = \sum_{k=0}^n a_k (X^{k+1} - rX^k)$ . Soit  $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On a :

$$\begin{aligned} y \in S_{(X-r)P} &\iff \sum_{k=0}^n a_k (y^{(k+1)} - r y^{(k)}) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^n a_k (y' - r y)^{(k)} = 0 \\ &\iff y' - r y \in S_P \end{aligned}$$

(b) Soit  $y \in S_P$ . En notant  $a_0, \dots, a_n$  les coefficients de  $P$ , on a :  $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ .  
 En dérivant cette égalité, on obtient  $a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y' = 0$ , i.e  $a_n (y')(n) + \dots + a_0 y' = 0$   
 donc  $y' \in S_P$ . Donc,  $S_P$  est stable par dérivation.  
 Par ailleurs, si  $y \in S_P$  alors  $y' \in S_P$  (d'après ce qui vient d'être démontré) et donc  $y' - r y \in S_P$  puisque  $S_P$  est un espace vectoriel et est donc stable par combinaison linéaire.  
 Donc,  $y \in S_{(X-r)P}$  d'après la question précédente. Donc,  $S_P \subset S_{(X-r)P}$ .

**Partie B**

6. Soit  $r \in \mathbb{C}$ . On a :

- $E_r \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  puisque  $\tilde{Q}e_r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par produit de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  ;
- on a clairement  $E_r \neq \emptyset$  ;
- Soient  $(y_1, y_2) \in E_r$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Il existe  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $y_1 = \tilde{Q}_1 e_r$  et  $y_2 = \tilde{Q}_2 e_r$ . Alors,

$$y_1 + y_2 = (\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2)e_r = \widetilde{(Q_1 + Q_2)}e_r \in E_r$$

Donc,  $E_r$  est stable par combinaison linéaire.

Donc,  $E_r$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

7. (a) Il est clair que :

$$\forall x \in E_{r_1}, x = 0 \implies x = 0$$

Donc,  $E_{r_1}$  est en somme directe... tout seul. Donc le résultat est vrai pour  $p = 1$ .

(b) Par hypothèse, on a :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \tilde{Q}_k e_{r_k} + \tilde{Q}_p e_{r_p} = 0 \tag{1}$$

Dérivons cette expression (qui est bien évidemment dérivable...). On obtient :

$$\sum_{k=1}^{p-1} (\tilde{Q}_k' + r_k \tilde{Q}_k) e_{r_k} + (\tilde{Q}_p' + r_p \tilde{Q}_p) e_{r_p} = 0 \tag{2}$$

Puis on fait (1)  $\times (\tilde{Q}_p' + r_p \tilde{Q}_p) - (2) \times \tilde{Q}_p$  de manière à éliminer le dernier terme. On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{p-1} [\tilde{Q}_k (\tilde{Q}_p' + r_p \tilde{Q}_p) - (\tilde{Q}_k' + r_k \tilde{Q}_k) \tilde{Q}_p] e_{r_k} = 0$$

L'hypothèse de récurrence nous permet alors d'affirmer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \tilde{Q}_k (\tilde{Q}_p' + r_p \tilde{Q}_p) = (\tilde{Q}_k' + r_k \tilde{Q}_k) \tilde{Q}_p$$

Et cette égalité entre fonctions polynomiales est en fait une égalité entre polynômes par identification entre ces deux types d'objets sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad Q_k (Q_p' + r_p Q_p) = (Q_k' + r_k Q_k) Q_p$$

Supposons  $Q_p \neq 0$ . Alors, en posant  $R_k = \frac{Q_k}{Q_p}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ , l'égalité précédente donne :

$$R'_k = (r_p - r_k)R_k$$

D'après la question 2, il existe  $C_k \in \mathbb{C}$  tel que

$$\widetilde{R}_k = C_k e_{r_p - r_k}$$

Or  $R_k$  est une fonction rationnelle, donc nécessairement  $C_k = 0$ , car  $r_p \neq r_k$ .

Ainsi  $Q_k = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ , la relation initiale devient ( $\widetilde{Q}_p e_{r_p} = 0$ ), donc  $Q_p = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi  $Q_p$  est nul et l'hypothèse de récurrence nous permet alors directement d'affirmer que tous les  $Q_k$ , pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$  sont nuls, ce qui prouve que la somme est directe.

8. Soit  $r \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{H}_k$  la propriété : «  $S_{(X-r)^k} = \{\widetilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]\}$  ».

**Initialisation :** La propriété est vraie pour  $k = 1$  d'après la question 2.

**Hérédité :** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\mathcal{H}_k$  est vraie.

Soit  $y \in S_{(X-r)^{k+1}}$ . Alors, d'après la question 5a, on a  $y' - ry \in S_{(X-r)^k}$ . Donc, par hypothèse de récurrence, il existe  $Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$  tel que  $y' - ry = \widetilde{Q}e_r$ .

La solution de cette équation homogène est de la forme  $\lambda e_r$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

On cherche une solution particulière sous la forme  $y_{SP} = f e_r$  où  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  (méthode de variation de la constante). Alors,

$$y_{SP} \text{ est solution de } y' - ry = \widetilde{Q}e_r \iff f'e_r = \widetilde{Q}e_r$$

Il suffit alors de prendre  $f = \widetilde{P}$  où  $P \in \mathbb{C}_k[X]$  est un polynôme vérifiant  $P' = Q$  (qui est donc bien de degré  $k$  puisque  $Q$  est de degré  $k-1$ ).

On peut donc en conclure que  $y = (\widetilde{P} + \lambda)e_r$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ , ce qui montre bien que  $y \in \{\widetilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}_k[X]\}$ .

Réciproquement, si  $y \in \{\widetilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}_k[X]\}$  alors il existe  $Q \in \mathbb{C}_k[X]$  tel que  $y = \widetilde{Q}e_r$ . On a alors  $y' - ry = \widetilde{Q}'e_r = \widetilde{Q}'e_r$ . Puisque  $Q' \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ , on en déduit, par hypothèse de récurrence que  $y' - ry \in S_{(X-r)^k}$ . Alors d'après la question 5a,  $y \in S_{(X-r)^{k+1}}$ .

Bref, on a bien montré que  $S_{(X-r)^{k+1}} = \{\widetilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}_k[X]\}$  donc  $\mathcal{H}_{k+1}$  est vraie.

**Conclusion :** La propriété  $\mathcal{H}_k$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , à savoir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_{(X-r)^k} = \{\widetilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]\}$$

9. Soit  $f \in S_{(X-u)^k}$ . D'après la question précédente, il existe  $P \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$  tel que  $f = \widetilde{P}e_u$ .

Soit  $y \in S_{(X-u)^k}$ . De même, il existe  $Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$  tel que  $y = \widetilde{Q}e_u$ . On a alors :

$$y' - ry = f \iff Q' + (u-r)Q = P$$

Écrivons

$$P = \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^{k-1} b_j X^j$$

On a alors :

$$Q' + (u-r)Q = P \iff \begin{cases} (u-r)b_{k-1} = a_{k-1}, \\ (j+1)b_{j+1} + (u-r)b_j = a_j \quad \text{pour } j \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket. \end{cases}$$

Comme  $u \neq r$ , ce système triangulaire est un système de Cramer, qui se résout de proche en proche, en commençant par  $(b_{k-1})$ , puis en déterminant successivement  $b_{k-2}, \dots, b_0$ .

Il existe donc  $Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$  tel que  $Q' + (u-r)Q = P$ , ce qui conclut.

10. (a) Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{H}_n$  la propriété : « pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ , on a  $S_P \subset S_{(X-r_1)^{m_1}} + \dots + S_{(X-r_s)^{m_s}}$  avec  $r_1, \dots, r_s$  les racines de  $P$ , de multiplicité  $m_1, \dots, m_s$  ».

**Initialisation :** ( $n = 1$ ) Soit  $P$  un polynôme de degré 1. Alors  $P$  est de la forme  $\lambda(X - r)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $r \in \mathbb{C}$ . Si  $y \in S_P$  alors  $y$  est solution de  $\lambda(y' - ry) = 0$  donc en particulier,  $y - r y = 0$  puisque  $\lambda \neq 0$  et donc  $y \in S_{X-r}$ .  
Ainsi,  $\mathcal{H}_1$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$ . On suppose que  $\mathcal{H}_n$  est vraie. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n + 1$  et soit  $y \in S_P$ . Soit  $r_1$  une racine de  $P$  (qui existe bien d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). On a alors  $X - r_1 \mid P$  et on note  $Q \in \mathbb{C}[X]$  le polynôme (de degré  $n$ ) tel que  $P = (X - r_1)Q$ . Alors, d'après la question 5a, on a  $y' - r_1 y \in S_Q$ . En notant  $\rho_1, \dots, \rho_m$  les racines de  $Q$  de multiplicité  $\mu_1, \dots, \mu_s$ , on a par hypothèse de récurrence, l'existence de  $(f_1, \dots, f_m) \in S_{(X-\rho_1)^{\mu_1}} \times \dots \times S_{(X-\rho_s)^{\mu_s}}$  tel que

$$y' - r_1 y = f_1 + \dots + f_m$$

D'après la question 9, il existe  $y_1, \dots, y_m \in S_{(X-\rho_1)^{\mu_1}} \times \dots \times S_{(X-\rho_s)^{\mu_s}}$  tel que  $y'_i - r_1 y_i = f_i$ . On a ainsi :

$$y' - r_1 y = y_1 - r_1 y_1 + \dots + y_m - r_1 y_m$$

On pose alors  $z = y - \sum_{i=1}^m y_i$ , de sorte que :

$$z' - r_1 z = 0$$

Donc  $z \in S_{X-r_1}$ . On a donc,

$$y = z + \sum_{i=1}^m y_i \in S_{X-r_1} + S_{(X-\rho_1)^{\mu_1}} + \dots + S_{(X-\rho_s)^{\mu_s}}$$

Étant donné le résultat obtenu en question 5(b), on obtient bien l'hérédité voulue.

- (b) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul, de degré  $n$ , et soit  $P = \prod_{i=1}^s (X - r_i)^{m_i}$  sa décomposition en facteurs irréductibles, où les  $r_i$  sont deux à deux distincts et  $m_i \geq 1$ .  
D'après la question 10(a), on a :

$$S_P \subset \sum_{i=1}^s S_{(X-r_i)^{m_i}}.$$

Par ailleurs, comme  $(X - r_i)^{m_i}$  divise  $P$ , on a pour tout  $i$ ,

$$S_{(X-r_i)^{m_i}} \subset S_P,$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^s S_{(X-r_i)^{m_i}} \subset S_P.$$

Ainsi,

$$S_P = \sum_{i=1}^s S_{(X-r_i)^{m_i}}.$$

D'après les questions 7 et 8, cette somme est directe, donc :

$$S_P = \bigoplus_{i=1}^s S_{(X-r_i)^{m_i}}.$$

Or, d'après la question 8, pour tout (i),

$$S_{(X-r_i)^{m_i}} = \{Q(x)e^{r_i x} \mid Q \in \mathbb{C}_{m_i-1}[X]\}$$

donc  $\dim S_{(X-r_i)^{m_i}} = m_i$ .

Par additivité de la dimension dans une somme directe, on obtient :

$$\dim S_P = \sum_{i=1}^s m_i = n.$$

Enfin, une base de  $S_P$  est donnée par la réunion des bases des  $S_{(X-r_i)^{m_i}}$ , soit :

$$(x \mapsto x^k e^{r_i x})_{1 \leq i \leq s, 0 \leq k \leq m_i-1}.$$

En particulier, pour  $P = (X-1)(X+2)^3$ , une base de  $S_P$  est :

$$(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-2x}, x \mapsto e^{-2x}, x \mapsto x^2 e^{-2x}).$$

#### Problème 4 –

##### Partie A

1. Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$  un couple de matrices stochastiques. Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , notons respectivement  $a_{i,j}, b_{i,j}$  et  $c_{i,j}$  les coefficients d'indice  $(i, j)$  des matrices  $A, B$  et  $AB$ . On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$$

car les coefficients de  $A$  et  $B$  sont positifs puis pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p c_{i,j} &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^p b_{k,j} \sum_{i=1}^p a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^p b_{k,j} && \text{car } A \text{ est stochastique} \\ &= 1 && \text{car } B \text{ est stochastique.} \end{aligned}$$

Donc  $AB$  est une matrice stochastique.

2. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ . Appliquons le théorème des accroissements finis sur  $[k, k+1]$ .
- La fonction  $\ln$  est continue sur  $]0, +\infty[$  donc continue sur le segment  $[k, k+1]$ .
  - La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  donc dérivable sur  $]k, k+1[$ .

Donc il existe  $c \in ]k, k+1[$  tel que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{c}.$$

Or,  $c$  est élément de  $]k, k+1[$  et la fonction inverse est strictement décroissante sur  $]k, k+1[$  donc

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}.$$

(b) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$\ln(n+1) = \underbrace{\ln(n)}_{n \rightarrow +\infty} + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \rightarrow +\infty}.$$

Donc lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a

$$\ln(n+1) = \ln(n) + o(1)$$

et puisque 1 est négligeable devant  $\ln(n)$ ,

$$\ln(n+1) = \ln(n) + o(\ln(n)).$$

Par conséquent,

$$\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

**Remarque** - Puisque  $\ln(n) \neq 0$  si  $n \geq 2$ , on pouvait aussi montrer que  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

(c) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . D'après la question 2a, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

par télescopage. On a aussi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1+1} < 1 + \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) = 1 + \ln(n)$$

(c'est ici que  $n \geq 2$  est utile). D'où

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \ln(n).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \ln(n)$$

avec  $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  et  $1 + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ . Donc par encadrement,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

## Partie B

3. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $R_i$  l'événement « La  $i$ -ième boule tirée est rouge ». On cherche ainsi la probabilité de l'événement

$$\bigcup_{i=1}^n R_i.$$

Son complémentaire est

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n R_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{R_i}.$$

La composition de l'urne ne dépendant pas des tirages précédents, on va supposer que les événements  $R_1, \dots, R_n$  sont mutuellement indépendants. Les événements contraires  $\overline{R_1}, \dots, \overline{R_n}$  sont donc aussi mutuellement indépendants d'où

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{R_i}\right) = \prod_{i=1}^n P(\overline{R_i}) = \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1} = \frac{1}{n+1}$$

par télescopage. Et ainsi,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

**Partie C**

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Appliquons trois fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1})$ . Lors du  $n$ -ième tirage, il y a  $n+1$  boules dont une seule rouge. Par conséquent :

- $P(A_n | A_{n-1}) = \frac{n}{n+1}$  et  $P(A_n | B_{n-1}) = P(A_n | C_{n-1}) = 0$  donc

$$\begin{aligned} a_n &= P(A_n) \\ &= P(A_n \cap A_{n-1}) + P(A_n \cap B_{n-1}) + P(A_n \cap C_{n-1}) \\ &= P(A_{n-1})P(A_n | A_{n-1}) + P(B_{n-1})P(A_n | B_{n-1}) + P(C_{n-1})P(A_n | C_{n-1}) \\ &= \frac{n}{n+1} a_{n-1} \end{aligned}$$

- $P(B_n | A_{n-1}) = \frac{1}{n+1}, P(B_n | B_{n-1}) = \frac{n}{n+1}$  et  $P(B_n | C_{n-1}) = 0$  donc

$$\begin{aligned} b_n &= P(B_n) \\ &= P(B_n \cap A_{n-1}) + P(B_n \cap B_{n-1}) + P(B_n \cap C_{n-1}) \\ &= P(A_{n-1})P(B_n | A_{n-1}) + P(B_{n-1})P(B_n | B_{n-1}) + P(C_{n-1})P(B_n | C_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n+1} a_{n-1} + \frac{n}{n+1} b_{n-1} \end{aligned}$$

- De même,

$$c_n = \frac{1}{n+1} b_{n-1} + c_{n-1}$$

Ainsi,  $X_n = M_n X_{n-1}$ .

(b) On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$X_n = M_n \times \dots \times M_1 \times X_0.$$

5. Raisonnons par récurrence. Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit

$$\mathcal{P}(n) : \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

- On a

$$P_1 = M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1 = 0$  conviennent. Donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie. Il existe deux réels  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= M_{n+1} \times P_n \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 & 0 \\ \frac{n+1}{n+2} & \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+2} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n+2} & 0 & 0 \\ \alpha_{n+1} & \frac{1}{n+2} & 0 \\ \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} \alpha_n \\ \beta_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \alpha_n + \beta_n \\ \gamma_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Il existe ainsi deux suites réelles  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+1}{n+2} \alpha_n.$$

6. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= (n+2)\alpha_{n+1} \\ &= (n+2) \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+1}{n+2} \alpha_n \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + (n+1)\alpha_n \\ &= \frac{1}{n+1} + H_n \end{aligned}$$

donc

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit en sommant ces égalités, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

donc par télescopage et avec un changement d'indice dans la somme de droite,

$$H_n - H_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

et puisque  $H_1 = 2\alpha_1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ , il vient

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

7. On a montré dans la question 2c que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  donc

$$\alpha_n = \frac{H_n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

et donc

$$\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Étant donné que pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $P_n$  est stochastique comme produit de telles matrices, on a la somme des coefficients de sa première colonne qui vaut 1, par conséquent,

$$\beta_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = P_n \times X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{n}{n+1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

donc  $c_n = \beta_n$ . Ainsi,  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

#### Partie D

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La famille  $(A_n, B_n, C_n)$  forme également un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} a_n &= P(A_n) \\ &= P(A_n \cap A_{n-1}) + P(A_n \cap B_{n-1}) + P(A_n \cap C_{n-1}) \\ &= P(A_{n-1})P(A_n | A_{n-1}) + P(B_{n-1})P(A_n | B_{n-1}) + P(C_{n-1})P(A_n | C_{n-1}) \\ &= \frac{n}{n+1}a_{n-1} + \frac{n}{n+1}b_{n-1} \\ &= \frac{n}{n+1}(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ &= \frac{n}{n+1}(1 - c_{n-1}) \\ &= -\frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 c_n &= P(C_n) \\
 &= P(C_n \cap A_{n-1}) + P(C_n \cap B_{n-1}) + P(C_n \cap C_{n-1}) \\
 &= P(A_{n-1})P(C_n | A_{n-1}) + P(B_{n-1})P(C_n | B_{n-1}) + P(C_{n-1})P(C_n | C_{n-1}) \\
 &= \frac{1}{n+1}b_{n-1} + c_{n-1} \\
 &= \frac{1}{n+1}(1 - a_{n-1} - c_{n-1}) + c_{n-1} \\
 &= -\frac{1}{n+1}a_{n-1} + \frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

9. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= -\frac{n+1}{n+2}c_n + \frac{n+1}{n+2} \\
 &= -\frac{n+1}{n+2} \left( -\frac{1}{n+1}a_{n-1} + \frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{n+1}{n+2} \\
 &= \frac{1}{n+2}a_{n-1} - \frac{n}{n+2}c_{n-1} + \frac{n}{n+2} \\
 &= \frac{n+2}{n+1}a_{n-1} - \frac{n}{n+2} \left( 1 - \frac{n+1}{n}a_n \right) + \frac{n}{n+2} \quad \text{car } a_n = -\frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{n}{n+1} \\
 &= \frac{n+2}{n+2}a_n + \frac{1}{n+2}a_{n-1}
 \end{aligned}$$

donc

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+2}a_n + \frac{1}{n+2}a_{n-1} = -\frac{1}{n+2}(a_n - a_{n-1}).$$

10. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= -\frac{1}{n+2}(a_n - a_{n-1}) \\
 &= \left(-\frac{1}{n+2}\right) \left(-\frac{1}{n+1}\right) (a_{n-1} - a_{n-2}) \\
 &\vdots \\
 &= \left(-\frac{1}{n+2}\right) \left(-\frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right) (a_1 - a_0) \\
 &= (-1)^n \frac{2}{(n+2)!} (a_1 - a_0).
 \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on obtient après un télescopage, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_n - a_0 = 2(a_1 - a_0) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+2)!} = 2(a_1 - a_0) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = 2(a_1 - a_0) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

car  $\sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 = 0$ . Enfin,  $a_0 = 1$  et  $a_1 = \frac{1}{2}$  donc  $2(a_1 - a_0) = -1$ . Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

**Remarque** - On peut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$$

donc

$$P(A_n) = a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632.$$

De plus, on a clairement

$$P(B_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

(la probabilité de tirer une boule rouge au  $n$ -ième tirage vaut  $\frac{1}{n+1}$ ) donc par encadrement  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Et ainsi,

$$P(C_n) = c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \approx 0,368.$$