

DEVOIR SURVEILLÉ 7

Durée : exactement la durée d'une opération d'ablation de la thyroïde.

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Deux possibilités s'offrent à vous :

- Piste bleue : Exercice 1, Problème 1 et Problème 2
- Piste rouge : Problème 1, Problème 3 et Problème 4

Bon courage!

Exercice 1 –

1. Donner les bases canoniques des \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^4 et $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, ainsi que du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Montrer que l'ensemble $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$ est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0 \text{ ET } x + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , et donner une base de F .
4. On définit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} F &= \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid v_0 = 0\} \\ G &= \{w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 3w_n\} \end{aligned}$$

Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5. Montrer que la famille de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. (a) Déterminer la dimension de :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = P'(2) = 0\}.$$

- (b) Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.
- (c) Peut-on affirmer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$? Justifier.
7. Énoncer la formule de Grassmann **avec ses hypothèses**.

Problème 1 – Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : dans l'espace des quadruplets.

On se place dans \mathbb{R}^4 et on considère les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, -1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 1, 0, 1), \quad v_3 = (3, 3, -2, 1)$$

On pose également $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel et en exhiber une base.
2. Montrer que G est un espace vectoriel et en exhiber une base.
3. Exhiber une base de $F \cap G$.

Partie B : dans l'espace des matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $E_k = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1} M\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer l'ensemble E_1 .

(b) Déterminer l'ensemble E_2 et en exhiber une base.

3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, E_k \subset E_{k+1}$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $E_k = E_{k+1}$.

Partie C : dans l'espace des suites réelles.

1. *Question préliminaire* : On souhaite montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 2(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(a) **Méthode 1** : Soit $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En faisant apparaître un télescopage, calculer $(1 - q) \sum_{k=1}^{n-1} k q^k$, puis conclure.

(b) **Méthode 2** : Retrouver le résultat par récurrence.

Les suites a, b et c sont des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1; b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $c_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

F et G sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par :

$$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+3} = 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n\} \text{ et } G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n\}$$

2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui contient les suites a, b et c .
3. Vérifier que la famille (a, b, c) est une famille libre de F .
4. Le but de cette question est de montrer que la famille (a, b, c) est une base de F .
 - (a) Soit $u \in F$. On considère la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$ (*).
 - i. Vérifier que $v \in G$. En déduire que v est combinaison linéaire de b et c .
 - ii. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de $u_0, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$. En déduire que u est combinaison linéaire des suites a, b et c . *Indication* : on pourra utiliser la question préliminaire.
 - (b) Conclure.

Problème 2 – Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, notés A , B , C et D , d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet A .
- Si à l'instant n ($n \geq 0$), la puce se trouve sur le sommet A , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$), la puce se trouve sur le sommet B , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$), la puce se trouve sur le sommet C , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geq 1$), la puce se trouve sur le sommet D , elle sera à l'instant $n + 1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- A_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet A à l'instant n ";
- B_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet B à l'instant n ";
- C_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet C à l'instant n ";
- D_n l'évènement : "la puce se trouve sur le sommet D à l'instant n ".

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P(A_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n).$$

(b) Exprimer de même, pour tout entier $n \geq 2$, $P(B_{n+1})$, $P(C_{n+1})$, $P(D_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ et $P(D_n)$.

(c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

(d) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$: $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$.

2. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

De plus, on pose : $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B$.

3. (a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

(b) Établir pour tout entier naturel n , la relation suivante : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

4. On pose $C = 6A$. Soit R , D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer RQ . En déduire que R est inversible et donner son inverse.

(b) Calculer $CR - RD$.

(c) En déduire pour tout entier naturel n , la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}$.

5. Donner les expressions de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ et $P(D_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3 –

On s'intéresse dans ce problème aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Le polynôme $a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ est appelé le polynôme caractéristique d'une telle équation. Vous avez vu au premier semestre que l'ensemble des solutions dépend de la forme scindée du polynôme caractéristique pour $n \in \{1, 2\}$. Nous allons dans ce problème généraliser ces résultats.

Pour tout $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, on note S_P l'ensemble des solutions de l'équation $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Par exemple :

$$S_{X^2 - X + 2} = \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' - y' + 2y = 0\}$$

Pour tous $r \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, on note e_r la fonction $x \mapsto e^{rx}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et \tilde{P} la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , dérivables. On rappelle que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f est constante si et seulement si f' est la fonction nulle.

Dernière remarque. Les espaces vectoriels manipulés dans ce problème sont tous des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Partie A - Premières observations, premiers exemples

1. Montrer que S_P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $S_{X-r} = \text{Vect}(e_r)$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. On pourra au choix utiliser les résultats connus sur les équations différentielles, ou dériver une fonction de la forme ye_{-r} pour voir ce que cela donne.
3. (a) Montrer que S_{X^2-3X+2} contient S_{X-1} et S_{X-2} , puis que $S_{X^2-3X+2} = S_{X-1} \oplus S_{X-2}$.
(b) Montrer que l'ensemble $\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' - 3y' + 2y = e_4\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et déterminer une base de sa direction.
4. Montrer que la famille $(x \mapsto x^k e^{rx})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est libre pour tout $r \in \mathbb{C}$.
5. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{C}$.
(a) Montrer que pour tout $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: $y \in S_{(X-r)P} \iff y' - ry \in S_P$.
(b) Montrer que S_P est stable par dérivation, puis que $S_P \subset S_{(X-r)P}$.

On peut alors montrer par récurrence (mais on ne vous demande pas de le faire!) que $S_P \subset S_Q$ pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels P divise Q .

Partie B - Cas général

On pose $E_r = \{x \mapsto Q(x)e^{rx} \mid Q \in \mathbb{C}[X]\} = \{\tilde{Q}e_r \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$ pour tout $r \in \mathbb{C}$.

6. Montrer que E_r est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour tout $r \in \mathbb{C}$.

La définition de deux sous-espaces vectoriels en somme directe a été vue en cours. Par extension, on dit que des sous-espaces F_1, \dots, F_p (avec $p \geq 1$) sont en somme directe lorsque tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ se décompose de manière unique en somme de vecteurs de F_1, \dots, F_p , ce que l'on peut aussi écrire :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \forall (x'_1, \dots, x'_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \left[x_1 + \dots + x_p = x'_1 + \dots + x'_p \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = x'_i \right]$$

Il est alors facile de voir que cette condition est équivalente à la suivante :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad \left[x_1 + \dots + x_p = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0 \right]$$

7. On souhaite montrer par récurrence que E_{r_1}, \dots, E_{r_p} sont en somme directe pour tous $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{C}$ distincts.

(a) Initialisation : Montrer le résultat pour $p = 1$.

(b) Hérédité : Soit $p \geq 2$. On suppose le résultat vrai au rang $p - 1$. Soient $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{C}$ distincts et $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $\widetilde{Q}_1 e_{r_1} + \dots + \widetilde{Q}_p e_{r_p} = 0$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$: $(Q'_k + r_k Q_k) Q_p = (Q'_p + r_p Q_p) Q_k$, puis conclure.

8. Montrer par récurrence que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{C}$: $S_{(X-r)^k} = \{ \widetilde{Q} e_r \mid Q \in \mathbb{C}_{k-1}[X] \}$.

9. Soient $r, u \in \mathbb{C}$ distincts et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall f \in S_{(X-u)^k}, \exists y \in S_{(X-r)^k}, y' - r y = f$.
On pourra montrer que la résolution de $y' - r y = f$ avec $y \in S_{(X-u)^k}$ se ramène à la résolution d'une équation polynomiale, elle même équivalente à un système triangulaire.

10. (a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$:

$$S_P \subset S_{(X-r_1)^{m_1}} + \dots + S_{(X-r_s)^{m_s}}$$

où l'on note r_1, \dots, r_s les racines distinctes de P et m_1, \dots, m_s leurs multiplicités respectives. Étant donnée une fonction $y \in S_P$, on pourra s'intéresser à la fonction $y' - r_1 y$ et exploiter le résultat de la question 9).

(b) Que vaut la dimension de S_P pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul? Déterminer une base de $S_{(X-1)(X+2)^3}$.

Problème 4 – Dans tout le problème, on effectue plusieurs tirages dans une urne dont la composition varie de la manière suivante :

- lors du premier tirage, l'urne est composée de 2 boules : 1 boule rouge et 1 boule blanche ;
- lors du deuxième tirage, l'urne est composée de 3 boules : 1 boule rouge et 2 boules blanches (on replace la boule tirée et on ajoute une boule blanche) ;
- lors du n -ième tirage (où $n \in \mathbb{N}^*$), l'urne est composée de $n + 1$ boules : 1 boule rouge et n boules blanches (après chaque tirage, on replace la boule tirée et on ajoute une boule blanche).

Partie A - Deux résultats préliminaires

Définition - On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque :

- tous les coefficients de la matrice A sont positifs ;
- la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 (i.e. $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{i=1}^p a_{i,j} = 1$).

1. Montrer que si $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$ désigne un couple de matrices stochastiques, alors $A \times B$ est une matrice stochastique.

2. (a) En utilisant par exemple le théorème des accroissements finis, montrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}.$$

(b) Vérifier que $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) Démontrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie B - Probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge lors de n tirages

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge lors des n premiers tirages. *On pourra commencer par déterminer la probabilité de l'événement contraire.*

Partie C - Probabilité de tirer au moins deux fois la boule rouge lors de n tirages

Dans cette partie, pour tout entier $n \geq 1$, on considère les trois événements suivants :

- A_n : « On a tiré zéro boule rouge lors des n premiers tirages »;
- B_n : « On a tiré exactement une fois la boule rouge lors des n premiers tirages »;
- C_n : « On a tiré au moins deux fois la boule rouge lors des n premiers tirages »

et l'on note a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives. On pose par convention $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

Enfin, on note
$$M_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

4. (a) Justifier soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_n = M_n X_{n-1}$.
 (b) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression de la matrice X_n en fonction de la matrice X_0 et des matrices M_i où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Désormais, pour tout entier $n \geq 1$, on considère la matrice $P_n = M_n \times \dots \times M_1$.
5. Pour tout entier $n \geq 1$, justifier l'existence de deux réels α_n et β_n tels que

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \alpha_n & \frac{1}{n+1} & 0 \\ \beta_n & \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+1}{n+2} \alpha_n.$$

6. On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = (n+1)\alpha_n$.

Montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

7. En déduire que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Partie D - Probabilité de tirer deux fois consécutivement la boule rouge lors de n tirages

Dans cette partie, pour tout entier $n \geq 1$, on considère les trois événements suivants :

- A_n : « On n'a pas tiré deux fois consécutivement la boule rouge lors des n premiers tirages et le n -ième tirage a donné une boule blanche »;
- B_n : « On n'a pas tiré deux fois consécutivement la boule rouge lors des n premiers tirages, le $(n-1)$ -ième tirage a donné une boule blanche et le n -ième tirage a donné une boule rouge »;
- C_n : « On a tiré à un moment donné deux boules rouges consécutivement lors des n premiers tirages »

et l'on note a_n, b_n, c_n leurs probabilités respectives. On pose par convention $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

8. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$a_n = -\frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad c_n = -\frac{1}{n+1}a_{n-1} + \frac{n}{n+1}c_{n-1} + \frac{1}{n+1}.$$

9. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+2}(a_n - a_{n-1}).$$

10. Conclure que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}.$$