# Corrigé Devoir Surveillé 6

**Problème 1 –**

1. (a) $I_n A = A = AI_n$ donc $\boxed{I_n \in \mathcal{C}(A).}$

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. $A^p A = A^{p+1} = AA^p$, donc $\boxed{A^p \in \mathcal{C}(A).}$

   (c) On a
$$\begin{array}{rcll} \lambda(MA) & = & \lambda(AM) & \text{car } M \in \mathcal{C}(A) \\ & = & A(\lambda M) & \end{array}$$
   donc $\boxed{\lambda M \in \mathcal{C}(A).}$ De plus,
$$\begin{array}{rcll} A(MN) & = & (AM)N & \\ & = & (MA)N & \text{car } M \in \mathcal{C}(A) \\ & = & M(AN) & \\ & = & M(NA) & \text{car } N \in \mathcal{C}(A) \\ & = & (MN)A & \end{array}$$
   donc $\boxed{MN \in \mathcal{C}(A).}$ Enfin,
$$\begin{array}{rcll} (M+N)A & = & MA + NA & \\ & = & AM + AN & \text{car } M, N \in \mathcal{C}(A) \\ & = & A(M+N) & \end{array}$$
   donc $\boxed{M + N \in \mathcal{C}(A).}$

   (d) On a $AM = MA$ donc en multipliant cette égalité à droite par $M^{-1}$ on obtient $A = MAM^{-1}$. On multiplie cette nouvelle identité par $M^{-1}$ à gauche, ce qui donne $M^{-1}A = AM^{-1}$. Donc $\boxed{M^{-1} \in \mathcal{C}(A).}$

2. (a) On a $A^T = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^T = \lambda I_3 + \mu A$. Alors le coefficient de position (1,2) dans cette égalité donne $\lambda \times 0 + \mu \times 1 = -4$, d'où $\mu = -4$. Le coefficient de position (2,1) fournit plutôt $\lambda \times 0 + \mu \times (-4) = 1$, d'où $\mu = -\dfrac{1}{4}$, ce qui est contradictoire. Donc $\boxed{A^T \notin \mathcal{E}.}$

   (b) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \lambda I_2 + \mu A$. On a $I_2, A \in \mathcal{C}(A)$ d'après les questions 1.(a), 1.(b), puis, avec 1.(c), $\lambda I_2 + \mu A \in \mathcal{C}(A)$. Donc $M \in \mathcal{C}(A)$ et l'on vient de montrer que $\boxed{\mathcal{E} \subset \mathcal{C}(A).}$

   (c) On a $AM = \begin{pmatrix} c-3a & d-3b \\ c-4a & d-4b \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 4b-3a & b+a \\ -4d-3c & d+c \end{pmatrix}$. Donc
$$M \in \mathcal{C}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} c-3a & = & -4b-3a \\ d-3b & = & b+a \\ c-4a & = & -4d-3c \\ d-4b & = & d+c \end{array} \right.$$
   On peut écrire ce système linéaire à l'aide d'une matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ -4 & -16 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -4 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{M \in \mathcal{C}(A) \iff \begin{cases} -a-4b+d &= 0 \\ -4b-c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= -4b \\ d &= a+4b \end{cases}.}$

(d) Supposons $M \in \mathcal{C}(A)$. Alors, d'après la question précédente, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -4\beta & \alpha+4\beta \end{pmatrix} = (\alpha+3\beta)I_2 + \beta A.$$

Donc $M \in \mathcal{E}$ et ainsi $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{E}$.
Avec 2.(b), on conclut que $\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathcal{E}.}$

3. (a) En utilisant le fait que $A = R^2 = RR$, on a

$$RA = R(RR) = (RR)R = AR$$

donc $\boxed{R \text{ appartient à } \mathcal{C}_A.}$

(b) On note $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu, \nu$ trois scalaires distincts.

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ (ses coefficients sont donc des éléments de $\mathbb{K}$). Alors, après calcul de $AB$ et $BA$,

$$AB = BA \iff \begin{cases} \lambda a = \lambda a, \quad \lambda b = \mu b, \quad \lambda c = \nu c \\ \mu d = \lambda d, \quad \mu e = \mu e, \quad \mu f = \nu f \\ \nu g = \lambda g, \quad \nu h = \mu h, \quad \nu j = \nu j \end{cases}$$

Comme les égalités « sur la diagonale » sont toujours vérifiées, on a

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff \begin{cases} (\lambda-\mu)b = 0, \quad (\lambda-\nu)c = 0 \\ (\mu-\lambda)d = 0, \quad (\mu-\nu)f = 0 \\ (\nu-\lambda)g = 0, \quad (\nu-\mu)h = 0 \end{cases} \\ &\iff b = c = d = f = g = h = 0 \end{aligned}$$

car $\lambda-\mu$, $\mu-\nu$ et $\lambda-\nu$ sont non-nuls.
On obtient alors que $\boxed{\mathcal{C}_A \text{ est l'ensemble des matrices diagonales.}}$

(c) **Analyse :** On suppose que l'on a trouvé une racine carrée $R$ de $D$. D'après la question 3, $R$ appartient à $\mathcal{C}_D$. Or la matrice $D$ est diagonale et les coefficients sur sa diagonale sont tous distincts, donc $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ d'après la question 2. On en déduit que $R$ est nécessairement diagonale.

Soit $a, b, c$ trois complexes tels que $R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(a,b,c)$. On a $R^2 = D$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad & \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{donc} \quad & \left[a^2 = 4 \text{ et } b^2 = -1 \text{ et } c^2 = 1\right] \\ \text{donc} \quad & \left[(a = 2 \text{ ou } a = -2) \text{ et } (b = i \text{ ou } b = -i) \text{ et } (c = 1 \text{ ou } c = -1)\right] \end{aligned}$$

donc il y a 8 candidats racines carrées pour $D$ qui sont : $\mathrm{Diag}(2,i,1)$, $\mathrm{Diag}(2,i,-1)$, $\mathrm{Diag}(2,-i,1)$, $\mathrm{Diag}(2,-i,-1)$, $\mathrm{Diag}(-2,i,1)$, $\mathrm{Diag}(-2,i,-1)$, $\mathrm{Diag}(-2,-i,1)$, $\mathrm{Diag}(-2,-i,-1)$.

**Synthèse :** Un calcul évident montre que chacun de ces 8 candidats a pour carré la matrice $D$.

**Conclusion :**

On en déduit que dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, les 8 racines carrées de $D$ sont :
$\mathrm{Diag}(2,i,1)$, $\mathrm{Diag}(2,i,-1)$, $\mathrm{Diag}(2,-i,1)$, $\mathrm{Diag}(2,-i,-1)$,
$\mathrm{Diag}(-2,i,1)$, $\mathrm{Diag}(-2,i,-1)$, $\mathrm{Diag}(-2,-i,1)$, $\mathrm{Diag}(-2,-i,-1)$.

Les racines carrées de $D$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont aussi racines carrées de $D$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Or parmi les 8 matrices précédentes, aucune n'appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc

il n'y a aucune racine carrée de $D$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**Problème 2 –**
**Préliminaires**

1. On a, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{1}{5}u^5 + o\left(u^5\right)$$
$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o\left(u^2\right)$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2+1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} > |x|$. On en déduit en particulier que $g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $g$ est dérivable sur son ensemble de définition, comme composée de fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

3. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est un domaine symétrique. Notons par ailleurs que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right),$$

de sorte que,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \exp\left(\frac{1}{-x}\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)\right) = \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Donc, $f$ est bien une fonction paire.

**Partie A**

4. Notons tout d'abord que, pour $x$ voisin de 0 :

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)$$

Posons alors $u = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right)$. On a :

$$
\begin{aligned}
u &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right) \\
u^2 &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right)\right)^2 = x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^5 + o\left(x^5\right) \\
u^3 &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right)\right)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 + o\left(x^5\right) \\
u^4 &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right)\right)^4 = x^4 + 2x^5 + o\left(x^5\right) \\
u^5 &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^5\right)\right)^5 = x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc, $u^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$. D'où, $o\left(u^5\right) = o\left(x^5\right)$.
De sorte que,

$$
\begin{aligned}
\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) &\underset{x\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{1}{5}u^5 + o\left(u^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^5\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5\right) \\
&\qquad - \frac{1}{4}\left(x^4 + 2x^5\right) + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}
$$

qui est bien le résultat demandé.

5. On a alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} \times \exp\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)\right)
\end{aligned}
$$

Posons $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)$. On a $u \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. Par ailleurs,

$$\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^4\right)$$

Comme pour la question précédente, on a $o\left(u^4\right) = o\left(x^4\right)$. Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right) \\
u^2 &= \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^2 = \frac{1}{36}x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

De sorte que,

$$f(x) = \mathrm{e} \times \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + \frac{1}{72}x^4 + o\left(x^4\right)\right) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{6}x^2 + \frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4 + o\left(x^4\right)$$

6. $f$ admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0, donc en particulier à l'ordre 0, et le terme d'ordre 0 est e. Donc, $f$ est prolongeable par continuité en posant 0 en posant $f(0) = e$.
7. Ce prolongement est dérivable en 0 puisque $f$ admet un développement limité à l'ordre 1. De plus, le terme d'ordre 1 dans le développement limité de $f$ est nul, donc $f'(0) = 0$.
8. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant le résultat de la question **2**, on obtient, pour tout $x \neq 0$ :

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times f(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

d'où le résultat demandé en posant

9. (a) Déterminons le développement limité à l'ordre 3 de $\varphi$. En utilisant le résultat de la question **4**, on a :

$$\varphi(x) = x \times \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o\left(x^3\right) = -\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

   (b) On a alors

$$f'(x) = f(x) \times \left(-\frac{1}{3}x + o(x)\right)$$

   Or, il a été établi que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. D'où par produit de limites, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc, $f'$ est continue en 0.
   De plus, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
   Donc, $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

10. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. De plus, par composition et quotient de limites usuelles, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x} = 0$.
Puis par composition avec la fonction exponentielle, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Par parité de $f$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

11. (a) La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} \leqslant 0$$

   Donc, $\varphi$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) On a $\varphi(0) = 0 - \ln(1) = 0$. De plus, $\varphi$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc
   - $\forall x \leqslant 0, \quad \varphi(x) \geqslant 0$ ;
   - $\forall x \geqslant 0, \quad \varphi(x) \leqslant 0$.

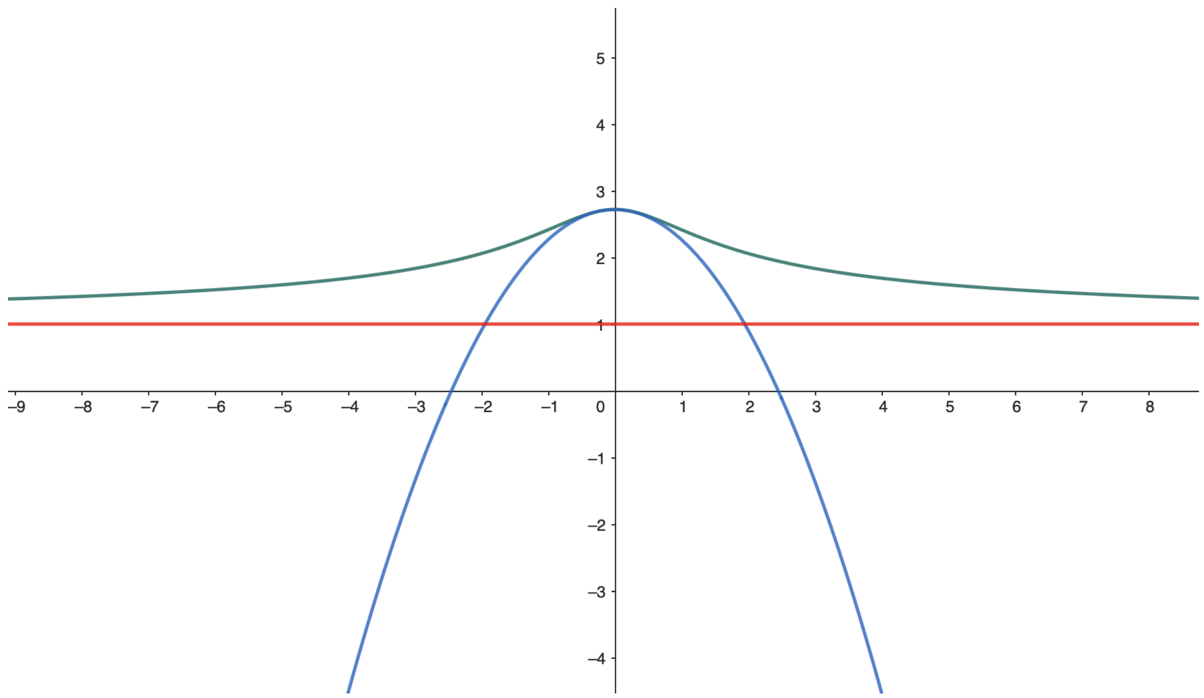
   (c) On a vu à la question **8** que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\varphi(x)$. Or, $f$ est positive sur $\mathbb{R}^*$, donc $f'$ est du signe de $\varphi$ sur $\mathbb{R}^*$. Grâce à la question précédente, on en déduit le tableau de signes de $f'$ et le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $1$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}$ | $\searrow$ | $1$ |

12. D'après le développement limité effectué à la question **9.(a)**, on a :

$$f(x)-\mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)=+\frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4+o\left(x^4\right)\geqslant 0$$

Donc, la courbe représentative de $f$ se situe au dessus de la parabole d'équation $y=\mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)$ au voisinage de 0.
On obtient la courbe suivante, où la courbe représentative de $f$ est tracée en vert, la parabole d'équation $y=\mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{6}\right)$ est tracée en bleue, et la droite d'équation $y=1$ (asymptote à la courbe en $\pm\infty$) est tracée en rouge :




**Partie B**

13. Rappelons le développement limité de $f$ en 0, obtenu à la question **5** :

$$f(x)\underset{x\to0}{=}\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{6}x^2+\frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4+o\left(x^4\right)$$

Par théorème de primitivation de développement limité, on a :

$$F(x)\underset{x\to0}{=}F(0)+\mathrm{e}\,x-\frac{\mathrm{e}}{18}x^3+\frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^5+o\left(x^5\right)\underset{x\to0}{=}\mathrm{e}\,x-\frac{\mathrm{e}}{18}x^3+\frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^5+o\left(x^5\right)$$

De sorte que, pour $x\neq0$ :

$$H(x)\underset{x\to0}{=}\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{18}x^2+\frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^4+o\left(x^4\right)$$

14. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \mathrm{e} = f(0) = H(0)$.
Donc, $H$ est continue en 0.

15. La fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ comme primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $H$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, dont le dénominateur s'annule en 0.
De plus, $H$ admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc $H$ est deux fois dérivable en 0 et on a :
$$H'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad H''(0) = -\frac{e}{9}$$

16. (a) $F$ étant la primitive de $f$ qui s'annule en 0, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x = \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} = H(x)$$

(b) Notons tout d'abord que pour $x = 0$, on a $H(x) = H(0) = f(0)$ et l'inégalité demandée est trivialement vérifiée.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **11.(c)**) donc en particulier $f$ est décroissante sur $[0,x]$. Ainsi,
$$H(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\times x f(x) = f(x)$$

17. La fonction $H$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad H'(x) = \frac{x f(x) - F(x)}{x}$$
Or, d'après la question précédente, $H(x) \geqslant f(x)$ donc $xH(x) \geqslant x f(x)$, d'où $F(x) \geqslant x f(x)$. En particulier, $H'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et aussi sur $\mathbb{R}_+$ puisque $H'(0) = 0$). Ainsi, $H$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

**Problème 3 –**
**Partie A**

1. (a) $\boxed{\text{On a } T_2(X) = 2X^2 - 1,\ T_3(X) = 4X^3 - 3X \text{ et } T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1.}$

(b) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $P_n$ : "$T_n$ est un polynôme de degré $n$, de coefficient dominant $2^{n-1}$."
**Initialisation :** D'après la question précédente, $\deg(T_1) = 1$, $\deg(T_2) = 2$, le coefficient dominant de $T_1$ est 1, celui de $T_2$ est 2. Donc $P_1$ est vraie.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P_n$ et $P_{n+1}$ sont vraies. $T_{n+2} = 2XT_n n + 1 - T_n$. Or, $\deg(XT_{n+1}) = n + 2 \neq n = \deg(T_n)$ par hypothèse de récurrence. Donc le monôme de plus haut degré de $T_{n+2}$ est celui de $2XT_{n+1}$, à savoir $2X2^n X^{n+1} = 2^{n+1}X^{n+2}$. Donc $P_{n+2}$ est vraie.
**Conclusion :** Par récurrence double,
$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}.}$

(c) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{H}_n$ :
« $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{T}_n(-x) = (-1)^n \widetilde{T}_n(x)$ ».

▷ Soit $x \in \mathbb{R}$.
- ◇ $\widetilde{T}_0(-x) = 1$ et $(-1)^0 \widetilde{T}_0(x) = 1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- ◇ $\widetilde{T}_1(-x) = -x$ et $(-1)^1 \widetilde{T}_1(x) = -x$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{n+2}(-x) &= 2 \times (-x)\widetilde{T}_{n+1}(-x) - \widetilde{T}_n(-x) \\
&= 2 \times (-x) \times (-1)^{n+1}\widetilde{T}_{n+1}(x) - (-1)^n\widetilde{T}_n(x) \\
&\qquad \text{d'après } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \\
&= 2x(-1)^{n+2}\widetilde{T}_{n+1}(x) - (-1)^n\widetilde{T}_n(x) \\
&= (-1)^{n+2}\Big(2x\widetilde{T}_{n+1}(x) - \widetilde{T}_n(x)\Big) \\
&\qquad \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2} \\
&= (-1)^{n+2}\widetilde{T}_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

▷ Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T}_n(-x) = (-1)^n\widetilde{T}_n(x)$, autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ est de même parité que } n.}$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ la propriété « $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ».

▷ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

◇ $\widetilde{T}_0(\cos(\theta)) = 1$ et $\cos(0 \times \theta) = 1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

◇ $\widetilde{T}_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ et $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\theta) &= 2\cos(\theta)\,T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \\
&\qquad \text{car } 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\
&= \cos((n+2)\theta)
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{H}_{n+2}$ est donc vraie.

▷ Par récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(0 \times n) = 1$$

et

$$T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } T_n(1) = 1 \text{ et } T_n(-1) = (-1)^n.}$$

3. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On a

$$T_n(x_k) = T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0; n-1]\!],\ x_k \text{ est une racine de } T_n.}$$

(b) Les $\theta_k$, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, sont des nombres distincts de $[0; \pi]$. Comme cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, tous les $x_k$ sont des nombres distincts.

$$\boxed{\text{On a donc trouvé } n \text{ racines distinctes de } T_n.}$$

(c) Comme $T_n$ est un polynôme de degré $n$, il possède au plus $n$ racines. Comme on en a trouvé $n$, on les a toutes et elles sont toutes de multiplicité 1. On peut donc factoriser $T_n$ comme suit

$$\boxed{T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right).}$$

4. (a) D'après la question 2.(a), on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Les fonctions cos et $T_n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta).$$

Comme $\sin(\theta) \neq 0$ pour tout $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\boxed{\text{pour tout } \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[,\ T_n'(\cos(\theta)) = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

(b) Les fonctions $T_n'$ et cos sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $T_n'(1) = \lim\limits_{\theta\to 0^+} T_n'(\cos(\theta))$. Or

$$T_n'(\cos(\theta)) = n\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0^+}{\sim} n\frac{n\theta}{\theta} \underset{\theta\to 0^+}{\sim} n^2$$

donc

$$\boxed{T_n'(1) = n^2.}$$

5. (a) La fonction $g$ est la fonction nulle et les fonctions $T_n$ et cos sont deux fois dérivables donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(x)T_n'(\cos(x)) + n\sin(nx) = 0 \\ g''(x) &= \sin^2(x)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2\cos(nx) = 0 \end{aligned}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-\cos^2(x))T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2T_n(\cos(x)) = 0.$$

Soit $y \in [-1;1]$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \cos(x)$. D'après ce qui précède on a

$$(1-y^2)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2T_n(y) = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall y \in [-1;1],\ (1-y^2)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2T_n(y) = 0.}$$

(b) D'après ce qui précédente, le polynôme $(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X)$ possède une infinité de racines, à savoir au moins tous les nombres de $[-1;1]$. C'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.}$$

**Partie B**

6. (a) Il existe $a$ et $b$ réels tels que

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1}$$

En multipliant par $X$ et en évaluant en 0, on obtient $a = -1$. En multipliant par $X-1$ et en évaluant en 1, on obtient $b = 1$.

$$\boxed{\text{D'où, } \frac{1}{X(X-1)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X-1}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{-1}{k} \right) + \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} \right) \\
&= -\sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} \right) \\
&= -\frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{1}{k} \right) + 1 \\
&= 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.}$

(c) Pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Pour tout $k \geqslant 2$, $k^2 \geqslant k(k-1)$ donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$, d'où

$$S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2\cdot$$

On a donc bien $\boxed{S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 2\cdot}$

(d) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante est majorée par 2 donc elle converge vers une $\boxed{\text{limite finie } l \text{ inférieure ou égale à 2.}}$

7. (a) On a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = S'_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = S'_n + \frac{1}{4} S_n$$

et donc

$$\boxed{S'_n = S_{2n} - \frac{1}{4} S_n.}$$

(b) La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$ car c'est une suite extraite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc, d'après la question précédente, la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite $\ell'$ vérifie $\ell' = \ell - \frac{1}{4}\ell$ donc

$$\boxed{\text{la suite } (S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et sa limite } \ell' \text{ vérifie } \ell' = \frac{3}{4}\ell.}$$

8. (a) D'après la question **??** on a

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, \dots, x_{n-1}\}, \\ \ln(|T_n(x)|) = \ln(2^{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(|x - x_i|). \end{array}}$$

(b) On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$, $\dfrac{T_n'(x)}{T_n(x)}$ est le nombre dérivé en $x$ de $x \mapsto \ln(|T_n(x)|)$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0,\dots,x_{n-1}\},\ \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-x_k}.}$$

(c) En évaluant l'égalité de la question précédente en $x = 1$ (ce qui est possible car $1 \notin \{x_1,\dots,x_n\}$), on obtient

$$\frac{T_n'(1)}{T_n(1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-x_k}.$$

Or d'après la partie 1 on a $T_n(1) = 1$ et $T_n'(1) = n^2$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = n^2.}$$

(d) i. $\boxed{\cos(2x) = 1-2\sin^2(x) \text{ et } \tan^2(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)}.}$

ii. En utilisant la première formule de trigonométrie avec $x = \theta_k/2$, on obtient pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $1-\cos(\theta_k) = 2\sin^2(\frac{1}{2}\theta_k)$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2.}$$

En utilisant la deuxième formule de trigonométrie avec $x = \frac{1}{2}\theta_k$, on obtient $\tan^2(\frac{1}{2}\theta_k) = \dfrac{\sin^2(\frac{1}{2}\theta_k)}{1-\sin^2(\frac{1}{2}\theta_k)}$ donc $\dfrac{1}{\tan^2(\frac{1}{2}\theta_k)} = \dfrac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\theta_k)} - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} - 1\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)}\right) - n\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n}$$

9. (a) Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x) = \tan(x) - x$. Les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$f'(x) = 1-\cos(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \tan^2(x) \geqslant 0.$$

Les fonctions $f$ et $g$ sont donc croissantes et comme $f(0) = g(0) = 0$, elle sont positives, ainsi

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[ \text{ on a } \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).}$$

(b) On remarque que pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $\frac{2k+1}{4n}\pi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc d'après la question précédente

$$\sin\left(\frac{2k+1}{4n}\right) \leqslant \frac{2k+1}{4n}\pi \leqslant \tan\left(\frac{2k+1}{4n}\right).$$

et comme tous les termes de cette inégalité sont positifs, on a

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)} \leqslant \frac{16n^2}{(2k+1)^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)}$$

donc

$$\frac{\pi^2}{16n^2\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)} \leqslant \frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{16n^2\sin^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)}.$$

Or

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\frac{\pi^2}{16n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)} \leqslant S'_n \leqslant \frac{\pi^2}{16n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k+1}{4n}\right)}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16n} \leqslant S'_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}}$$

(c) Par le théorème des gendarmes, $\ell' = \frac{\pi^2}{8}$ et donc $\ell = \frac{4}{3}\ell' = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\text{On a } \ell' = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \ell = \frac{\pi^2}{6}.}$$