DEVOIR SURVEILLÉ 6

Durée : 0,1671 fois la période de rotation de la Terre sur elle-même.

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction !!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 3 problèmes. Bon courage !

Problème 1 – Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **commutant** de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. **Propriétés générales.** Dans cette question, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}(A)$.
   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p \in \mathcal{C}(A)$.
   (c) Soit $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et λ un réel. Montrer que les matrices λM, $M+N$ et MN appartiennent au commutant de A.
   (d) Soit $M \in \mathcal{C}(A)$. Montrer que si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.
2. **Un exemple.** Dans cette question, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Le but de cette question est de montrer que
$$\mathcal{C}(A) = \left\{\lambda \mathrm{I}_2 + \mu A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$
   On note $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{\lambda \mathrm{I}_2 + \mu A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
   (a) A-t-on $A^T \in \mathcal{E}$?
   (b) À l'aide des résultats de la question **1.** et sans faire aucun calcul de produit matriciel, justifier que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}(A)$.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer les produit AM et MA. En déduire que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\begin{cases} c = -4b \\ d = a + 4b \end{cases}$.
   (d) Montrer que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{E}$ et conclure.
3. **Racines carrées.** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **racine carrée** de A toute matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = A$.
   (a) On suppose qu'une matrice A possède au moins une racine carrée R. Montrer que R appartient à $\mathcal{C}(A)$.
   (b) On suppose que A est une matrice diagonale de format $(3,3)$ dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts.
   Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

(c) Dans cette question, on considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les racines carrées de D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Combien y en a-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Problème 2 – Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

On rappelle (à toutes fins utiles...) que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $X^\alpha = \exp\left(\alpha \ln(X)\right)$.

Préliminaires

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln(1+u)$ ainsi que le développement limité à l'ordre 2 de $(1+u)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$, fixé).
2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
3. Prouver que f est une fonction paire.

Partie A

4. Prouver que : $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)$.
5. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f en 0 .
6. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f ce prolongement.
7. Justifier que f est dérivable en 0 , préciser $f'(0)$.
8. Montrer que : $\quad \forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\varphi(x) \quad$ où $\quad \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
9. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de φ en 0.
   (b) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
10. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
11. (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
    (b) Calculer $\varphi(0)$. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.
    (c) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
12. Tracer le graphe de f. Préciser la position de la courbe par rapport à la parabole d'équation $y = e\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ au voisinage de 0.

Partie B

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ nulle en 0 .

On définit la fonction H sur $\mathbb{R}^+$en posant : $H(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{F(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

13. Déterminer le développement limité de H à l'ordre 4 au voisinage de 0.
14. Montrer que H est continue en 0 .
15. Montrer que H est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}^+$, préciser $H'(0)$ et $H''(0)$.
16. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad H(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
    (b) En déduire que $H(x) \geqslant f(x)$ pour tous les x de $\mathbb{R}^+$.
17. Étudier les variations de H sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 3 – On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce. On notera également T_n la fonction polynomiale associée à T_n.

Partie A

Dans cette partie, on montre plusieurs propriétés des polynômes de Tchebychev.

1. (a) Expliciter T_2, T_3 et T_4.
   (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. En déduire que T_n a la même parité que n.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
   $$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, x_k est une racine de T_n.
   (b) Combien a-t-on trouvé de racines distinctes de T_n ?
   (c) Donner la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $T_n'(\cos(\theta)) = n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   (b) En déduire que $T_n'(1) = n^2$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) En dérivant deux fois la fonction $g : x \mapsto T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$, montrer que :
   $$\forall y \in [-1, 1], \ \ (1-y^2)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2 T_n(y) = 0.$$
   (b) En déduire que l'on a :
   $$(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.$$

Partie B

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

6. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X-1)}$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $S_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 2$.
   (d) Montrer que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ inférieur ou égal à 2.
7. On considère la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n = S_{2n} - \dfrac{1}{4} S_n$.

(b) En déduire que la suite (S'_n) converge vers un nombre réel que l'on notera ℓ', et que $\ell' = \dfrac{3}{4}\ell$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déduire de la question 3. l'expression de $\ln(|T_n(x)|)$ sous forme d'une somme pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ (où les x_k ont été définis dans la partie A).

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, $\dfrac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k}$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = n^2$.

(d) i. Donner les formules de trigonométrie exprimant $\cos(2x)$ et $\tan^2(x)$ en fonction de $\sin^2(x)$.

ii. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n$$

9. (a) Montrer que pour tout $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}[$, on a $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

(b) En déduire un encadrement de S'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) En déduire ℓ' puis ℓ.