

CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 5

Exercice 1 –

1. On a :

- On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
- On sait que par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par passage à l'inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- On sait que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- On sait que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, les fonctions $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$. De plus, $\ln(x) \neq 0$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
Ainsi

$$f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Or $\ln(x)^2 > 0$ pour $x \in \mathcal{D}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$.

3. (a) Etudions le signe de $\ln(x) - 1$. On a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$\ln(x) - 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 1 \iff x \geq e^1.$$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	- 0 +	
Variations de f	0 ↘	$+\infty$ ↘	e ↗ $+\infty$	

On a $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = \frac{e}{1} = e$.

(b) D'après ce qui précède, la fonction f est strictement croissante de $[e; +\infty[$ dans $[e; +\infty[$. De plus, la fonction f étant dérivable sur $\mathcal{D}$, elle est en particulier continue sur $[e; +\infty[$. Ainsi d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[e; +\infty[$ dans $[e; +\infty[$.

4. (a) Soit $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff \frac{1}{\ln(x)} = 1 \quad \text{car } x \neq 0$$

Ainsi :

$$f(x) = x \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{e\}$.

(b)

$$f(x) - x \geq 0 \iff \frac{x}{\ln(x)} - x \geq 0 \iff \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)} \geq 0$$

Dressons alors le tableau de signes de ce quotient :

x	0	1	e	$+\infty$	
Signe de $1 - \ln(x)$		+	0	-	
Signe de $\ln(x)$		-	0	+	
$\frac{\text{Signe de } x(1 - \ln(x))}{\ln(x)}$		-	+	0	-

5. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq e$ ».

Initialisation ($n = 0$) $u_0 = 3 > e$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq e$. Or on a montré que f est strictement croissante sur $[e; +\infty[$ donc on a :

$$f(u_n) \geq f(e).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(e) = e$. On obtient donc

$$u_{n+1} \geq e.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or $f(x) - x \leq 0$ pour $x \geq e$ et on vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.

- (c) D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par e donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \geq e$.

Montrons que $\ell = e$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. La limite ℓ vérifie donc :

$$\ell = f(\ell).$$

Or on a montré à la question 4.(a) que l'équation $f(x) = x$ admettait une unique solution égale à e . Ainsi $\boxed{\ell = e}$.

6. (a) D'après la question 2., on a pour $x \in \mathcal{D}$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Calculons le terme $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$ et montrons qu'il est égal à $f'(x)$. On a pour $x \in [e; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{\ln(x) - 2}{\ln(x)}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\ln(x)^2 - (\ln(x) - 2)^2}{\ln(x)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\ln(x)^2 - \ln(x)^2 + 4\ln(x) - 4}{\ln(x)^2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4(\ln(x) - 1)}{\ln(x)^2}\right) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} = f'(x). \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$.

(b) Pour $x \in [e; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

Or $-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 0$ donc

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour } x \in [e; +\infty[.$$

7. On démontre ici ce qui était admis dans l'énoncé. La preuve s'appuie sur l'inégalité des accroissements finis vue dans le Chapitre 13.

La fonction f est continue et dérivable sur $[e; +\infty[$ et on a pour tout $x \in [e; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n \in [e; +\infty[$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|,$$

or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(e) = e$, on a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

(a) Montrons le résultat par récurrence.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ ».

Initialisation ($n = 0$) $u_0 = 3$ donc $|u_0 - e| = 3 - e \simeq 0.3$ et $\frac{1}{4^0} = 1$ ainsi $|u_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|$$

Or $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ par hypothèse de récurrence donc :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$$

ainsi :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, à savoir :

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

(b) Remarquons que $\frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\frac{1}{4} \in]-1; 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Or on a :

$$0 \leq |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e| = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e}$.

Exercice 2 –

1. (a) Les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{E}$ vérifient en particulier que $ad - bc = 0$ donc d'après le cours, elles ne sont pas inversibles.

(b) • Posons $a = 1, b = 1, c = -1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

• Posons $a = 1, b = -1, c = 1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

(c) • Posons $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } ad - bc = 2 \times (-2) - 0 \times 0 = -4 \neq 0 \text{ donc } S \notin \mathcal{E}$$

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } a + d = 2 + 2 = 4 \neq 0 \text{ donc } P \notin \mathcal{E}$$

On constate donc que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$.

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.

Or $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $a + d = 0$ donc :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

De plus, $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $ad - bc = 0$ donc $ad = bc$ donc :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = a \times 0 = 0$$

et

$$bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = d \times 0 = 0$$

Finalement, on a justifié que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Par suite, pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2$.

En conclusion, pour $n \geq 2$, $M^n = 0_2$.

2. (a) $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 5 + 4 = 9 \neq 0$ donc la matrice A est **inversible**.

(b) Calculons K :

$$K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors en posant $a = -2$, $b = 2$, $c = -2$ et $d = 2$, $a + d = -2 + 2 = 0$ et $ad - bc = -2 \times 2 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ donc $K \in \mathcal{E}$.

- (c) Montrons ce résultat par récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$.

Initialisation ($n = 0$) On a d'une part $A^0 = I$ et $3^0 I + 0 \times 3^{-1} K = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (3^n I + n3^{n-1} K) A \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3^n A + n3^{n-1} K A \\ &= 3^n (K + 3I) + n3^{n-1} K (K + 3I) \quad \text{car par définition de } K, A = K + 3I \\ &= 3^n K + 3^{n+1} I + n3^{n-1} K^2 + n3^n K \\ &= 3^n K + 3^{n+1} I + n3^n K \quad \text{car } K^2 = 0 \text{ puisque } K \in \mathcal{E} \\ &= 3^{n+1} I + (n+1)3^n K \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après ce qui précède, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \times 3^{n-1} & 2n \times 3^{n-1} \\ -2n \times 3^{n-1} & 3^n + 2n \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (a) D'après la question 2.(b), on sait que $K \in \mathcal{E}$ donc d'après la question 1.(d), on a $K^2 = 0_2$ i.e. $(A - 3I)^2 = 0_2$.

En développant, on obtient que $A^2 - 6A + 9I = 0_2$ donc $\alpha = -6$ et $\beta = 9$ conviennent.

Il reste à justifier l'unicité de α et β .

Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$ et soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha' A + \beta' I = 0_2$. Par soustraction, on obtient l'égalité :

$$(a - \alpha') A + (\beta - \beta') I = 0_2$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \neq \alpha'$. Alors on aurait $(\alpha - \alpha') A = (\beta' - \beta) I$ et puisque $\alpha - \alpha' \neq 0$, on aurait l'égalité $A = \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} I$, donc A serait diagonale, ce qui est absurde. Donc $\alpha = \alpha'$. Par suite, $(\beta - \beta') I = 0_2$, ce qui impose $\beta - \beta' = 0$ i.e. $\beta = \beta'$.

En conclusion, $(\alpha, \beta) = (-6, 9)$ est l'unique couple de réels tels que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$.

- (b) D'après la question précédente, $A^2 - 6A + 9I = 0$ donc $-A^2 + 6A = 9I$ et par suite $A(-A + 6I) = 9I$ donc $A \left[\frac{1}{9}(-A + 6I) \right] = I$ i.e. $A \left[3I - \frac{1}{6}A \right] = I$ ce qui suffit à prouver que la matrice A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$$

- (c) $K = A - 3I$ donc $A = K + 3I$ donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K + 3I) \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{3}{9}I \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$$

Pour $n = -1$, on a donc :

$$3^n I + n3^{n-1}K = 3^{-1}I + (-1) \times 3^{-2}K = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K = A^{-1}$$

donc la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ reste valide pour $n = -1$.

Montrons qu'elle reste également valide pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Tout élément $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ s'écrit $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ ».

Initialisation ($n = 1$) :

Nous venons de constater que $A^{-1} = 3^{-1}I - 3^{-2}K$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ et on sait que $K^2 = 0_2$ donc :

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n-1} \\ &= A^{-n} \times A^{-1} \\ &= (3^{-n}I - n3^{-n-1}K)(3^{-1}I - 3^{-2}K) \\ &= 3^{-n-1}I - 3^{-n-2}K - n3^{-n-2}K + n3^{-n-3}K^2 \\ &= 3^{-n-1}I - (n+1)3^{-n-2}K \\ &= 3^{-(n+1)}I - (n+1)3^{-(n+1)-1}K \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$$

En conclusion, la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ est valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème 1 – Partie I - Généralités

1. (a) Si f est absolument monotone, on a $f^{(0)}(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, donc f est positive.

On sait aussi que f' est positive sur $]a, b[$, donc f est croissante sur $]a, b[$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]a, b[$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et absolument monotone, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable $n+1$ fois et sa dérivée $(n+1)$ -ème est positive, ce qui signifie $(f')^{(n)} \geq 0$.

Ceci étant vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien montré que f' est absolument monotone.

2. Si f et g sont deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$, alors $f+g$ et fg sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b[$, on a :

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

La formule concernant $f \times g$ provient du théorème de Leibniz. Comme f et g sont absolument monotones, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]a, b[$, $f^{(k)}(x) \geq 0$ et $g^{(n-k)}(x) \geq 0$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \geq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]a, b[$, $(f \times g)^{(n)}(x) \geq 0$.

$f+g$ et $f \times g$ sont donc absolument monotones.

3. On raisonne par récurrence :

Initialisation : Pour $n=0$, $\varphi^{(0)} = \exp(f)$ est une fonction positive.

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_k vraie pour tout entier $k \leq n$. Soit $k \leq n+1$. Si $k \leq n$, alors $\varphi^{(k)} \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Si $k = n+1$:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(n+1)} = (\varphi')^{(n)} = (f'\varphi)^{(n)} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} f^{(n-\ell+1)} \varphi^{(\ell)}. \quad (\text{Formule de Leibniz})$$

f est absolument monotone, donc $f^{(n-\ell+1)}$ est positive pour tout ℓ entier entre 0 et n . De plus, $\varphi^{(\ell)}$ est positive pour tout ℓ entier entre 0 et n par hypothèse de récurrence. Enfin, les coefficients binomiaux sont positifs donc $\varphi^{(n+1)}$ est positive. Ainsi, P_{n+1} est vraie et donc P_k est vraie pour tout entier $k \leq n+1$.

Par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)} \geq 0$. Donc φ est absolument monotone.

Partie II - Absolue monotonie de la fonction Arcsin sur $]0; 1[$

4. (a) En calculant les premières dérivées de g , on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$P_n : \forall x \in]0; 1[, g^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{n!(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right)$$

est vraie. Montrons le par récurrence.

Initialisation : Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{0!}{(1-x)^{0+1}} - \frac{0!(-1)^0}{(1+x)^{0+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right).$$

On retrouve bien l'expression de g donnée dans l'énoncé. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie.

Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= (g^{(n)})'(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-n! \times (-(n+1)(1-x)^n)}{(1-x)^{2n+2}} - \frac{-n!(-1)^n \times ((n+1)(1+x)^n)}{(1+x)^{2n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)! \times ((1-x)^n)}{(1-x)^{2n+2}} - \frac{(n+1)!(-1)^{n+1} \times ((1+x)^n)}{(1+x)^{2n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} - \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+2}} \right) \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0; 1[$, $g^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right)$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0; 1[$. On a $0 \leq 1-x \leq 1+x$, donc $0 \leq (1-x)^{n+1} \leq (1+x)^{n+1}$ par croissance de la fonction puissance d'exposant $n+1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc $0 \leq \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$. On en déduit que $\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \right)$ et $\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \right)$ sont positifs ou nuls.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]0; 1[$, $g^{(n)}(x) \geq 0$. g est absolument monotone sur $]0; 1[$.

5. (a) Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$h(x) = \ln(f(x)) = \frac{-1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{-1}{2} (\ln(1-x) + \ln(1+x)).$$

f est dérivable et strictement positive, donc h est dérivable en x et

$$h'(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) = g(x).$$

- (b) h est positive par définition. Pour tout $n \geq 1$, $h^{(n)} = g^{(n-1)}$, or $g^{(n-1)}$ est positive par absolue monotonie de g . Donc h est absolument monotone.

D'après la question I.3, la fonction

$$\varphi: \begin{array}{ll}]0, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \exp(h(x)) = \exp(\ln(f(x))) = f(x) \end{array}$$

est absolument monotone sur $]0, 1[$. Donc f est absolument monotone.

6. Arcsin est positive sur $]0; 1[$. Elle y est dérivable et sa dérivée est f . Donc ses dérivées successives sont f et les dérivées successives de f , qui sont toutes des fonctions positives sur $]0; 1[$ d'après la question II.2. Donc Arcsin est absolument monotone sur $]0; 1[$.

Partie III - Fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$ et bornées

7. (a) Comme on a supposé que f' n'est pas identiquement nulle, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f'(A) \neq 0$. f étant absolument monotone, f' l'est aussi (question I.1). On en déduit que $f'(A) > 0$ et que f' est croissante (question I.1 à nouveau). Donc,

$$\text{pour tout } x \geq A, f'(x) \geq f'(A) > 0.$$

- (b) Soit x un réel tel que $x \geq A$. L'inégalité demandée est évidente si $x = A$. Si $x > A$, alors f est continue sur $[A; x]$ et dérivable sur $]A; x[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]A; x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x) - f(A)}{x - A}$. Or $c \geq A$, donc, d'après la question précédente, on a $f'(c) \geq f'(A)$. Ainsi, $f'(A) \leq \frac{f(x) - f(A)}{x - A}$, d'où $f'(A)(x - A) + f(A) \leq f(x)$. Ainsi,

$$\text{pour tout } x \text{ réel supérieur ou égal à } A, f'(A)(x - A) + f(A) \leq f(x).$$

- (c) $f'(A) > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(A)(x - A) + f(A)) = +\infty$. Donc, par théorème de comparaison,

$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Or f est croissante (par la question I.1) et bornée, donc admet une limite finie en $+\infty$, ce qui fournit une contradiction.

8. Soit f une fonction bornée et absolument monotone. On déduit des questions précédentes que la dérivée de f est identiquement nulle, donc f est constante égale à $c \in \mathbb{R}$. De plus, f est positive, donc $c \geq 0$.

Réciproquement, toute fonction constante positive est positive, bornée, infiniment dérivable et toutes ses dérivées successives sont nulles, donc elle est absolument monotone.

Finalement, on a montré que

l'ensemble des fonctions absolument monotones bornées sur $\mathbb{R}$
est l'ensemble des fonctions constantes positives.

9. On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée première est bornée.

Alors, par la question I.1, f' est absolument monotone. D'après la question précédente, f' étant également bornée, f' est constante positive. Donc il existe a et b réels tels que $a \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors pour tout $x < \frac{-b}{a}$, $f(x) < 0$, donc f n'est pas positive, ce qui est absurde. Donc $a = 0$, et f est constante égale à b . Comme f est positive, $b \geq 0$. Ainsi, f est une fonction constante positive.

Synthèse : Réciproquement, on a déjà vu que de telles fonctions sont absolument monotones à la question précédente.

Finalement, l'ensemble des fonctions absolument monotones
de dérivée première bornée sur $\mathbb{R}$
est l'ensemble des fonctions constantes positives.

Partie IV - Prolongement d'une application absolument monotone

10. D'après la question I.1, f est croissante sur $]a; b[$. f est positive donc minorée sur $]a; b[$. Elle admet donc une limite à droite finie en a d'après le théorème de la limite monotone. Comme f n'est pas définie en a ni à gauche de a , cette limite à droite en a est en fait une limite en a . Ainsi,

f peut se prolonger par continuité en a .

11. Pour tout $x \in]a; b[$, $\tilde{f}$ est dérivable en x et $\tilde{f}'(x) = f'(x)$. Donc $\tilde{f}'$ est croissante sur $]a; b[$ et minorée par 0 sur $]a; b[$. Donc $\tilde{f}'$ admet une limite à droite finie en a et donc une limite finie positive en a .

On rappelle que $\tilde{f}$ est continue sur $[a; b[$ et dérivable sur $]a; b[$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée,

$\tilde{f}$ est dérivable en a et $\tilde{f}'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{f}'(x) \geq 0$.

12. Remarquons tout d'abord que par une récurrence immédiate à partir de la question I.1, toutes les dérivées successives de f sont croissantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $\tilde{f}$ est n -fois dérivable sur $[a; b[$, $\tilde{f}^{(n)}(a) \geq 0$ et $\tilde{f}^{(n)}$ est continue sur $[a; b[$ ». On raisonne par récurrence.

Initialisation : $\tilde{f}$ est continue sur $[a; b[$ par définition. De plus, $\tilde{f}$ est positive sur $]a; b[$ et continue en a donc positive en a .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie.

Comme $\tilde{f}$ coïncide avec f sur $]a; b[$, $\tilde{f}$ est $(n+1)$ -fois dérivable sur $]a; b[$ et pour tout $x \in]a; b[$, $\tilde{f}^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \geq 0$. Ainsi, $\tilde{f}^{(n+1)}$ est croissante sur $]a; b[$ et minorée par 0 (car f est absolument monotone), donc admet une limite finie positive en a . De plus, $\tilde{f}^{(n)}$ est continue sur $[a; b[$ par hypothèse de récurrence. Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\tilde{f}^{(n)}$ est dérivable en a et $\tilde{f}^{(n+1)}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{f}^{(n+1)}(x) \geq 0$.

Donc $\tilde{f}$ est $(n+1)$ -fois dérivable sur $[a; b[$ et $\tilde{f}^{(n+1)}(a) \geq 0$. De plus, comme $\tilde{f}^{(n+1)}(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \tilde{f}^{(n+1)}(x)$, $\tilde{f}^{(n+1)}$ est continue en a et par conséquent continue sur $[a; b[$. On a donc montré P_{n+1} .

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}$ est n -fois dérivable sur $[a; b[$ et $\tilde{f}^{(n)}(a) \geq 0$. Donc

$\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $[a; b[$ et est absolument monotone sur $[a; b[$.

Problème 2 –

1. $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n l'assertion : « il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$ ».

H_0 est vraie en posant $a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Alors, il existe $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$. On

sait que $A^{n+1} = A^n \times A$, ainsi :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ p a_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ b_n p + c_n(1-p) & p c_n + 1-p & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $a_{n+1} = p a_n + p^n(1-p)$, $b_{n+1} = p b_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = p c_n + 1-p$. Ainsi on a obtenu

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ a_{n+1} & p^{n+1} & 0 \\ b_{n+1} & c_{n+1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ ce qui prouve } H_{n+1}.$$

Le principe de récurrence permet de conclure :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe trois réels } a_n, b_n \text{ et } c_n \text{ tels que } A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La suite (c_n) est arithmético-géométrique. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = px + 1 - p \iff x = 1$, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit $q_n = c_n - 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$q_{n+1} = pc_n + 1 - p - 1 = pc_n - p = pq_n$$

donc (q_n) est géométrique de raison p . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = q_0 p^n = -p^n$, puis

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = 1 - p^n.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+2} = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p)$, donc $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = p^{n+1}(1-p) - pa_{n+1} + p^2 a_n = p^{n+1}(1-p) - p(a_{n+1} - pa_n) = p^{n+1}(1-p) - p(p^n(1-p))$. Ainsi,

$$a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$$

- (b) Le polynôme caractéristique associé est $X^2 - 2pX + p^2 = (X - p)^2$. Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\lambda n + \mu)p^n$. Puisque $a_0 = 0$, alors $\mu = 0$, et $a_1 = 1 - p$ (car $A^1 = A$), donc $\lambda = \frac{1-p}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n(1-p)p^{n-1}$.

5. (a) Soit $M, N \in \mathcal{E}$. Alors $(MN)U = M(NU) = MU = U$ car M et N appartiennent à $\mathcal{E}$. Ainsi, $MN \in \mathcal{E}$.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n l'assertion « $T^n \in \mathcal{E}$ ».

H_0 est vraie car $T^0 = I_3$, donc $T^0 U = U$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Alors $T^{n+1} = T^n T$ avec $T^n \in \mathcal{E}$. De plus, $TU = A^T U = \begin{pmatrix} p+1-p \\ p+1-p \\ 1 \end{pmatrix} = U$, donc $T \in \mathcal{E}$. Avec la question précédente, $T^{n+1} \in \mathcal{E}$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n \in \mathcal{E}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $T^n = (A^n)^T$, donc, puisque $T^n \in \mathcal{E}$, alors le premier coefficient de $T^n U$ fournit $p^n + a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - p^n - n(1-p)p^{n-1}$ et finalement $b_n = 1 + (n-1)p^n - np^{n-1}$.

6. On a $B + C = A$.

7. (a) Appliquons la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } P \text{ est inversible, et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) On calcule : $BP = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit bien d'une matrice diagonale.

- (c) On procède par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'assertion : « $B^n = PD^n P^{-1}$ ».

H_0 est vraie car $PD^0 P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = B^0$. H_1 est également vraie car $PDP^{-1} = (PP^{-1})B(PP^{-1}) =$

$$I_3 B I_3 = B.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie. Alors :

$$B^{n+1} = B^n B = P D^n P^{-1} \times P D P^{-1} = P D^n (P^{-1} P) D P^{-1} = P D^n D P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$$

ce qui prouve H_{n+1} .

Le principe de récurrence assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = P D^n P^{-1}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D étant diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $P D^n = \begin{pmatrix} p^n & p^n & 0 \\ 0 & -p^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et enfin

$$B^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix}.$$

8. C^2 est la matrice nulle.

9. $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ p(p-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constate que $BC = CB$. Puisque $A = B + C$, alors d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^{n-k} C^k$$

Or, on a vu que $C^2 = 0$, donc pour $k \geq 2$, $C^k = 0$. Ainsi :

$$\boxed{A^n = B^n + n B^{n-1} C}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & p^{n-1} & 0 \\ 1-p^{n-1} & 1-p^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1-p^n & 1-p^n & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p^{n-1}-p^n & 0 & 0 \\ p^n-p^{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ n(1-p)p^{n-1} & p^n & 0 \\ 1+(n-1)p^n - np^{n-1} & 1-p^n & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$.