

DEVOIR SURVEILLÉ 5

Durée : 81,6% du temps d'ascension aller-retour du Mont Blanc, depuis l'église de Chamonix, par Benjamin Védrine le 24 mai 2025.

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 2 exercices et de 2 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{D}$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$ en le complétant par les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
(b) Montrer que f réalise une bijection de $[e; +\infty[$ sur $[e; +\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x , pour $x \in \mathcal{D}$.
(b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \mathcal{D}$.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.
(b) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.
6. (a) Montrer que $\forall x \in [e; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$.
(b) En déduire que $\forall x \in [e; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
7. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|$.
(a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.
(b) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2 – Soit a, b, c et d des réels et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les deux conditions :

$$a + d = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 0.$$

1. (a) Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles inversibles?
- (b) Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
- (c) En déduire que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$.
- (d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Déterminer la matrice M^2 et en déduire, pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2.

2. (a) Justifier l'inversibilité de la matrice A
- (b) On pose : $K = A - 3I$. Vérifier que la matrice K appartient à $\mathcal{E}$
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$. En déduire les quatre coefficients de la matrice A^n .
3. (a) établir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera, pour lequel $A^2 + \alpha A + \beta I$ est la matrice nulle.
- (b) Retrouver le fait que la matrice A est inversible et montrer que $A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$.
- (c) En déduire que $A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$ et vérifier que la formule trouvée à la question 2.(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$ est encore valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Problème 1 –

Définition : Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $]a, b[$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$. On dit que f est **absolument monotone** sur $]a, b[$ si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]a, b[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Les parties II, III et IV sont indépendantes, mais peuvent faire appel à des résultats de la partie I qu'on pourra utiliser, même sans avoir réussi à les démontrer.

Partie I - Généralités Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.

1. Soit f une fonction absolument monotone sur $]a, b[$.
 - (a) Justifier que f est positive et croissante.
 - (b) Justifier que f' est, elle aussi, absolument monotone.
2. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$. Démontrer que $f + g$ et $f \times g$ sont aussi absolument monotones sur $]a, b[$.
3. Dans cette question, on suppose que f est absolument monotone sur $]a, b[$ et on souhaite montrer que la fonction $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'est aussi. Pour $x \mapsto \exp(f(x))$ cela, raisonner par récurrence **forte** pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété

$$P_n : \langle \varphi^{(n)} \geq 0 \rangle$$

Indication : On pourra utiliser que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^{(n+1)} = (\varphi')^{(n)}$.

Partie II - Absolue monotonie de la fonction Arcsin sur $]0; 1[$

4. On considère l'application $g :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$).

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

- (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $g^{(n)}$.
 (b) Démontrer que g est absolument monotone sur $]0; 1[$.
5. On souhaite démontrer que l'application $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est absolument monotone
- $$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- sur $]0; 1[$. Pour cela, on pose $h = \ln(f)$.
- (a) Pour tout $x \in]0; 1[$, calculer $h'(x)$.
 (b) En déduire que h est absolument monotone sur $]0; 1[$, puis que f l'est aussi (on pourra utiliser pour cela un résultat de la partie I).
6. Démontrer que la fonction Arcsin est absolument monotone sur $]0; 1[$.

Partie III - Fonctions absolument monotones et bornées sur $\mathbb{R}$

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument monotone bornée sur $\mathbb{R}$. On veut démontrer que f' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que f' n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
- (a) Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) \geq f'(A) > 0$.
 (b) En utilisant l'inégalité ou l'égalité des accroissements finis, prouver que pour tout réel $x \geq A$, on a $f(x) \geq f(A) + f'(A)(x - A)$.
 (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puis aboutir à une contradiction.
8. Quelles sont les fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$ et bornées ?
 9. Déterminer toutes les fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée première est bornée.

Partie IV - Prolongement d'une application absolument monotone On suppose ici que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument monotone sur $]a; b[$.

10. Justifier qu'il est possible de prolonger f par continuité en a .

On note $\tilde{f} : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ce prolongement par continuité.

11. Démontrer que $\tilde{f}$ est dérivable en a et que $\tilde{f}'(a) \geq 0$.
 12. (Question plus difficile) Justifier que $\tilde{f}$ est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b[$ et même absolument monotone sur $[a; b[$.

Problème 2 –**Partie I : calcul des puissances d'une matrice.**

Soit $p \in]0, 1[$. On définit $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 . Que vaut A^0 ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels a_n , b_n et c_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}.$$

avec

$$a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p), \quad b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = pc_n + 1-p.$$

Pour cette question, on utilisera la relation $A^{n+1} = A^n \times A$.

3. La suite $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi obtenue est une suite « classique » : de quel type est-elle ? En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Vous pourrez utiliser sans démonstration que $c_0 = 0$.
4. (a) Montrer que la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = 0.$$

- (b) En déduire une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Vous pourrez utiliser sans justification que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1-p$.

5. On pose la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M \times U = U\}.$$

- (a) Montrer que pour toutes matrices M, N de $\mathcal{E}$, $MN \in \mathcal{E}$.
- (b) On pose $T = A^\top$ la matrice transposée de la matrice A . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n appartient à $\mathcal{E}$.
- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$.

Partie II : une autre manière de calculer les puissances de la matrice A .

On définit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Que vaut $B + C$?

7. On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que P est inversible et calculer l'inverse P^{-1} .
- (b) Calculer la matrice $D = P^{-1}BP$, et vérifier qu'elle est diagonale.
- (c) À l'aide des résultats précédentes, donner une expression de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

8. Calculer C^2 .

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction des puissances des matrices B et C .

10. Retrouver alors l'expression de A^n obtenue dans la partie A.