Corrigé Devoir Surveillé 2

Exercice 1 – Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (-14+10i)z - 16(1+i).$$

1. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff P(iy) = 0 \\ &\iff (iy)^3 - (6+i)(iy)^2 + (-14+10i)iy - 16(1+i) = 0 \\ &\iff -iy^3 + (6+i)y^2 + (-10-14i)y - 16(1+i) = 0 \\ &\iff \big(6y^2 - 10y - 16\big) + i\big(-y^3 + y^2 - 14y - 16\big) = 0 \end{aligned}$$

Or, $y \in \mathbb{R}$, donc $6y^2 - 10y - 16 \in \mathbb{R}$ et $-y^3 + y^2 - 14y - 16 \in \mathbb{R}$. Donc, par unicité de l'écriture algébrique :

$$P(iy) = 0 \iff \begin{cases} 6y^2 - 10y - 16 = 0 & (E_1) \\ -y^3 + y^2 - 14y - 16 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Commençons par résoudre (E_1) : $6y^2 - 10y - 16 = 0 \iff 3y^2 - 5y - 8 = 0$. Calculons le discriminant Δ de cette équation : $\Delta = 25 + 96 = 121 > 0$. L'équation admet donc deux solution réelles

$$y_1 = \frac{5+11}{6} = \frac{8}{3} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{5-11}{6} = -1$$

Regardons alors si y_1 et y_2 sont solutions de (E_2).

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_2) &\iff -(-1)^3 + (-1)^2 - 14(-1) - 16 = 0 \\ &\iff 1 + 1 + 14 - 16 = 0 \\ &\iff \text{VRAI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 \text{ est solution de } (E_2) &\iff -\left(\frac{8}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 14 \times \frac{8}{3} - 16 = 0 \\ &\iff \frac{-512}{27} + \frac{64}{9} - \frac{112}{3} - 16 = 0 \\ &\iff \frac{-512 + 192 - 1008 - 432}{27} = 0 \\ &\iff \text{FAUX} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(iy) = 0 \iff y = -1 \iff z = -i$$

Conclusion, l'unique complexe imaginaire pur, solution de l'équation $P(z) = 0$ est $z = -i$.

2. Par la question précédente, $-i$ est une racine de P. Donc $z + i$ divise P.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c) &\iff P(z) = az^3 + (b+ia)z^2 + (c+ib)z + ic \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ -6 - i = b + ia \\ -14 + 10i = c + ib \\ 16 - 16i = ic \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 - 2i \\ c = -16 + 16i \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z+i)(z^2 - (6+2i)z - 16 + 16i)$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z+i)(z^2-(6+2i)z-16+16i) = 0 \\ &\iff z+i = 0 \qquad \text{OU} \qquad z^2-(6+2i)z-16+16i = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant Δ de $z^2-(6+2i)z-16+16i$. On a :

$$\Delta = (6+2i)^2 - 4(-16+16i) = 36+24i-4+64-64i = 96-40i$$

On cherche une racine carrée $\delta = a+ib$ de Δ. On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 96 \\ 2ab = -40 \\ a^2+b^2 = \sqrt{96^2+40^2} = \sqrt{10816} = 104 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 200 \\ 2ab = -40 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \mp 2 \end{cases} \iff \delta = \pm(10-2i)$$

On en déduit donc les deux racines de $z^2-(6+2i)z-16+16i = 0$:

$$z_1 = \frac{6+2i+10-2i}{2} = 8 \qquad \text{et} \qquad z = \frac{6+2i-10+2i}{2} = -2+2i$$

Donc, l'ensemble des solutions complexes de $P(z) = 0$ est donné par

$$\mathcal{S} = \{-i\ ;\ 8\ ;\ -2+2i\}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $Z = z^7$. Alors,

$$\begin{aligned} z^{21}-(6+i)z^{14}+(-14+10i)z^7-16(1+i) = 0 &\iff P(Z) = 0 \\ &\iff Z = -i \qquad \text{OU} \qquad Z = 8 \qquad \text{OU} \qquad Z = -2+2i \\ &\iff z^7 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 8 \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\iff \exists k \in [\![0;6]\!], \quad z = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{14}+\frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = \sqrt[7]{8}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = 2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28}+\frac{2ik\pi}{7}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{14}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\} \cup \left\{2^{3/7}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\} \cup \left\{2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28}+\frac{2ik\pi}{7}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\}$$

Exercice 2 –

1. (a) D'après $(\star\star)$ utilisée avec $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.D'après $(\star\star)$ utilisée avec $y = x$, on a

$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x)$$

Et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après la question précédente

$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y)$$

ce qui nous donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,

$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}$$

En réinjectant dans $(\star\star)$, on obtient

$$f(x)f(y) = \sqrt{y}\cdot\frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot\frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right)$$

(d) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Alors

$$\begin{aligned}(\sqrt{y}f(x)-\sqrt{x}f(y))^2 &= yf(x)^2+xf(y)^2-2\sqrt{xy}f(x)f(y)\\ &= 2\sqrt{xy}\left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2+xf(y)^2\right)-f(x)f(y)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

(e) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. D'après la question 1.(d),

$$\sqrt{y}f(x)-\sqrt{x}f(y)=0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x)=\sqrt{x}f(y)$$

Comme x et y sont strictement postifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ cette dernière égalité, et l'on obtient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{f(y)}{\sqrt{y}}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) *Cette dernière question est plus difficile car c'est à vous de prendre quelques initiatives.*
Première étape : Comme la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel α tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)=\alpha$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x)=\alpha\sqrt{x}$$

Comme $f(0)=0=\alpha\cdot\sqrt{0}$, alors on peut finalement écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)=\alpha\sqrt{x}$$

Deuxième étape : Nous allons ensuite réinjecter ce résultat dans l'égalité $(\star\star)$. On obtient, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$

$$\alpha\sqrt{x}\cdot\alpha\sqrt{y}=\sqrt{y}\cdot\alpha\sqrt{2x}+\sqrt{x}\cdot\alpha\sqrt{2y}$$

i.e.

$$\alpha^2\sqrt{xy}=2\alpha\sqrt{2xy}$$

Comme ceci est vrai pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$, alors en particulier pour $x=y=1$, cela donne

$$\alpha^2=2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha-2\sqrt{2})=0$$

Ainsi $\alpha=0$ ou $\alpha=2\sqrt{2}$. Finalement f est donc bien la fonction nulle ou la fonction $x\in\mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.

2. La fonction nulle est bien sûr solution du problème. Posons $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$. Alors, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{y}f(2x)+\sqrt{x}f(2y)=\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{4x}+\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{4y}=4\sqrt{4xy}=8\sqrt{xy}=2\sqrt{2x}\cdot 2\sqrt{2y}$$

Donc f est bien solution du problème.
$\boxed{\text{Bilan}}$: ce problème admet donc exactement deux solutions, la fonction $x\in\mathbb{R}_+\longmapsto 2\sqrt{2x}$ et la fonction nulle.

Problème 1 –

1. Si $a > 0$, $b = 1$ donc $b \geqslant 1$. Si $a \leqslant 0$, puisque $a^2 \geqslant 0$ et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{a^2+1} \geqslant 1$, c'est à dire $b \geqslant 1$.
   $\boxed{\text{Dans tous les cas, } b \geqslant 1.}$

2. Déjà, l'inéquation n'est définie en $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $x^2 - 1 \geqslant 0$, c'est à dire $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. Soit un tel x :
   - si $a > 0$, on a immédiatement $a + \sqrt{x^2-1} > 0$ pour tout $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{]-\infty;-b] \cup [b;+\infty[}$ (puisque $b = 1$ dans ce cas).
   - si $a \leqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} a + \sqrt{x^2-1} > 0 &\iff \sqrt{x^2-1} > -a \\ &\iff x^2 - 1 > a^2, \end{aligned}$$

   car $\sqrt{x^2-1}$ et $-a$ sont deux quantités positives. Ainsi,

$$\begin{aligned} a + \sqrt{x^2-1} > 0 &\iff x^2 > a^2 + 1 \\ &\iff x^2 > b^2 \\ &\iff x \in]-\infty;-b[\cup]b;+\infty[\end{aligned}$$

   Comme $b \geqslant 1$, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{]-\infty;-b[\cup]b;+\infty[.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f_a est définie en x si et seulement si x est solution de l'inéquation $a + \sqrt{x^2-1} > 0$, donc d'après la question précédente, on a $\boxed{\mathcal{D}_a = \begin{cases}]-\infty;-b] \cup [b;+\infty[& \text{si } a > 0 \\ ]-\infty;-b[\cup]b;+\infty[& \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}}$

4. Les théorèmes généraux de dérivation garantissent la dérivabilité en $x \in \mathcal{D}_a$ si $x^2 - 1 > 0$, la fonction racine carrée n'étant dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, quelle que soit la valeur de a, on obtient d'après la question précédente que $\boxed{\mathcal{D}'_a =]-\infty;-b[\cup]b;+\infty[.}$

5. Soit $x \in \mathcal{D}_a$; alors $-x \in \mathcal{D}_a$, et :

$$\begin{aligned} f_a(-x) &= \ln(a + \sqrt{(-x)^2-1}) \\ &= \ln(a + \sqrt{x^2-1}) \\ &= f_a(x). \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La fonction } f_a \text{ est donc paire.}}$

6. Pour tout $x \in \mathcal{D}'_a$, on obtient :

$$f'_a(x) = \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{a + \sqrt{x^2-1}}$$

   et donc $\boxed{f'_a(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}(a+\sqrt{x^2-1})}.}$

   Lorsque $x \in \mathcal{D}'_a \cap \mathbb{R}_+$, $x > 0$ donc $f'_a(x) > 0$ donc puisque $\mathcal{D}'_a \cap \mathbb{R}_+$ est un intervalle,

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est strictement croissante sur } \mathcal{D}'_a \cap \mathbb{R}_+.}$$

7. (a) On a immédiatement $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty}$ quelle que soit la valeur de a.

(b) ▷ Si $a > 0$, la fonction f_a est définie (et continue) en $b = 1$ donc

$$\lim_{x\to b} f_a(x) = f_a(1) = \ln(a);$$

▷ Si $a = 0$, la fonction f_a n'est pas définie en $b = 1$ et $\lim_{x\to b} f_a(x) = -\infty$;

▷ Si $a < 0$, la fonction f_a n'est pas définie en b et $\lim_{x\to b} f_a(x) = -\infty$.

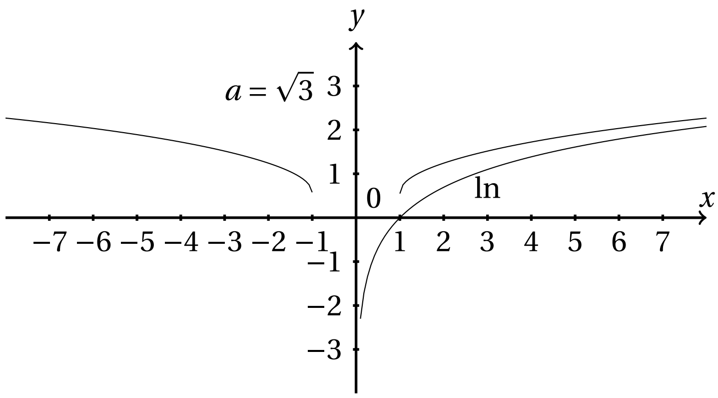
8. Pour tout $x > b$, on a :

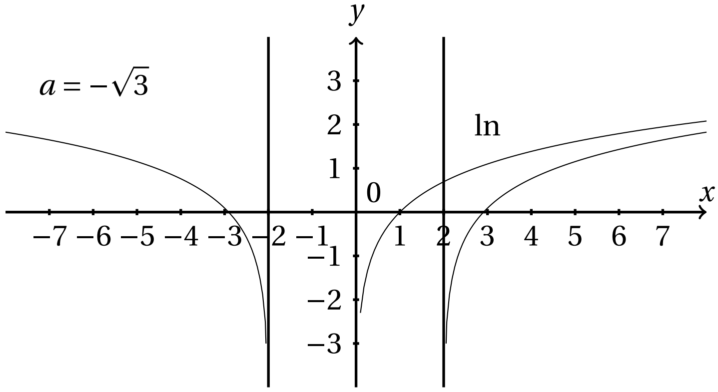
$$\begin{aligned} f_a(x) - \ln(x) &= \ln(a + \sqrt{x^2-1}) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2-1}}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a}{x} + \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} (f_a(x) - \ln(x)) = 0}$: graphiquement,

$\boxed{\text{les courbes de } f_a \text{ et de ln se rapprochent infiniment l'une de l'autre à l'infini.}}$

9.





Problème 2 – Partie 1 : Manipulation d'une expression trigonométrique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x).$$

1. Calculons $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. On a
$$f(0) = 1^2(1-1) + 0^2 = 0$$
Puis,
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 0.$$
Aussi,
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$$
Enfin,
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{3}{8}.$$

2. *Signe de f(x), méthode 1*

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimons $\cos(2x)$ uniquement en fonction de $\cos(x)$. On a directement,
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

   (b) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la question précédente, on a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x)\left(2\cos^2(x) - 1 - 1\right) + \sin^2(x) \\ &= 2\cos^4(x) - 2\cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) \\ &= 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1.$$

   (c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \cos(x)$. Par la question précédente,
$$f(x) < 0 \iff 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1 < 0 \iff 2X^4 - 3X^2 + 1 < 0$$
   Posons $Y = X^2$. Alors,
$$f(x) < 0 \iff 2Y^2 - 3Y + 1 < 0$$

Les deux racines de ce polynôme de degré 2 sont 1 et $\frac{1}{2}$. Donc

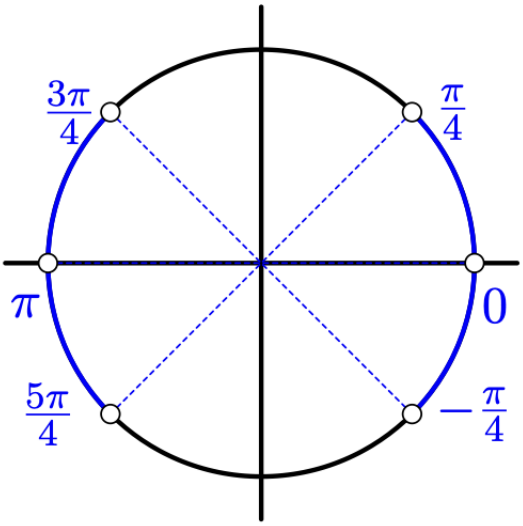
$$\begin{aligned}
f(x) < 0 &\iff Y \in \left]\frac{1}{2};1\right[\\
&\iff \frac{1}{2} < X^2 < 1 \\
&\iff -1 < X < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ OU } \frac{1}{\sqrt{2}} < X < 1 \\
&\iff -1 < \cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ OU } \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(x) < 1 \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ OU } (2k+1)\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\
&\qquad \text{OU } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < 2k\pi \text{ OU } 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$f(x) < 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi \text{ OU } k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Conclusion,

$$\mathcal{S} = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left] -\frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi\right[\cup \left] k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right[\right)$$



3. *Signe de $f(x)$, méthode 2.*

   (a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\cos(2x)\sin^2(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x) \\
&= \cos^2(x)\left(-2\sin\left(\frac{2x+0}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-0}{2}\right)\right) + \sin^2(x) \\
&= -2\cos^2(x)\sin(x)^2 + \sin^2(x) \\
&= -\sin^2(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) \\
&= -\sin^2(x)\cos(2x) \quad \text{d'après la question 2.a}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\cos(2x)\sin^2(x)$$

(b) Retrouvons le résultat de la question 2.c Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(x) < 0 &\iff -\cos(2x)\sin^2(x) < 0 \\
&\iff \cos(2x)\sin^2(x) > 0 \\
&\iff \begin{cases} \sin(x) \neq 0 \\ \cos(2x) > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \not\equiv 0[\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z}, -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \not\equiv 0[\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z}, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi \text{ OU } k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 2.c

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (]-\frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi[\cup]k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi[)$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéarisons l'expression de $f(x)$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x) \\
&= \frac{1 + \cos(2x)}{2}(\cos(2x) - 1) + \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos^2(2x) - 1 + 1 - \cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} - \cos(2x)\right) \\
&= \frac{\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1}{4}$$

Partie 2 : Inégalité de Winkler

On pose :

$$g : \quad x \mapsto \sin^2(x) + x\tan(x) - 2x^2.$$

5. Précisons $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g et vérifions que $]0; \frac{\pi}{2}[\subset \mathcal{D}_g$. La fonction sinus et la fonction carrée sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc par somme, on en déduit que

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

En particulier, on a directement

$$]0; \frac{\pi}{2}[\subset \mathcal{D}_g.$$

6. Calculons la dérivée de g sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. La fonction g est dérivable sur son domaine de définition comme somme de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition respectifs. Donc g

est dérivable en particulier sur $]0;\frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\cos(x)\sin(x)+\tan(x)+x\left(1+\tan^2(x)\right)-4x \\ &= \sin(2x)+\tan(x)+x\left(1+\tan^2(x)\right)-4x \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}[,\quad g'(x)=\sin(2x)+\tan(x)+x\left(1+\tan^2(x)\right)-4x$$

7. Montrons que $\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}[,\quad g''(x)=2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$. La fonction g' est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions qui le sont donc g est deux fois dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et par la question précédente, pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2\cos(2x)+1+\tan^2(x)+1+\tan^2(x)+x\left(2\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)\right)-4 \\ &= 2\cos(2x)+\left(1+\tan^2(x)\right)(2+2x\tan(x))-4 \\ &= 2\cos(2x)+2+2x\tan(x)+2\tan^2(x)+2x\tan^3(x)-4 \\ &= 2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2+2x\tan(x)+2x\tan^3(x) \\ &= 2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}[,\quad g''(x)=2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$$

8. Montrons que $\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}\Big[,\quad g''(x)=\frac{2f(x)}{\cos^2(x)}+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$. Soit $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$. On a

$$\begin{aligned} \frac{2f(x)}{\cos^2(x)}+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) &= \frac{2\left(\cos^2(x)(\cos(2x)-1)+\sin^2(x)\right)}{\cos^2(x)}+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= 2(\cos(2x)-1)+\tan^2(x)+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= 2\cos(2x)+2\tan^2(x)-2+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}\Big[,\quad g''(x)=\frac{2f(x)}{\cos^2(x)}+2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$$

9. A l'aide de la question 3.a montrons que $\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}\Big[,\quad f(x)=-\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x)$. Soit $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$. Par la question 3.a on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos(2x)\sin^2(x) \\ &= -\cos(2x)\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\cos(x)} \\ &= -\cos(2x)\tan(x)\sin(x)\cos(x) \\ &= -\cos(2x)\tan(x)\frac{\sin(2x)}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\tan(x)\sin(2x)\cos(2x) \\ &= -\frac{1}{2}\tan(x)\frac{\sin(4x)}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\tan(x)\sin(4x) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \quad f(x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x)\right.$$

10. Montrons que $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)(4x - \sin(4x))\right.$. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Par la question 8. et la question précédente,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sin(4x)\tan(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(4x)\tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right) + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)(-\sin(4x)+4x) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)(4x - \sin(4x)).\right.$$

11. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, \sin(t) \leqslant t$. Montrons que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[, g(x) > 0$. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. En prenant $t = 4x > 0$, on a $\sin(4x) < 4x$. Donc $4x - \sin(4x) > 0$. De plus $\tan(x) > 0$ et $1 + \tan^2(x) > 1 > 0$. Donc par la question précédente,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g''(x) > 0.$$

Donc la fonction g' est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. Or g' est définie et même continue en 0 (par la question 6.) donc g' est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) > g'(0) = 0.$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. Or g est définie et même continue en 0 . Donc g est strictement croissance sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g(x) > g(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g(x) > 0$$

12. Concluons en démontrant l'inégalité de Winkler : $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2\right.$. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + x\tan(x) - 2x^2 > 0 &\iff \sin^2(x) + x\tan(x) > 2x^2 \\ &\iff \frac{\sin^2(x)}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x} > 2 \quad \text{car } x^2 > 0 \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien l'inégalité de Winkler :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}\left[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2.\right.$$

Problème 3 – On considère l'application complexe suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{2i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. On a les calculs suivants :

$$f(-2) = \frac{2(-2)-i}{(-2)-2i} = \frac{-4-i}{-2-2i} = \frac{4+i}{2(1+i)} = \frac{(4+i)(1-i)}{2(1+1)} = \frac{4-4i+i+1}{4} = \frac{5-3i}{4}.$$

Conclusion,

$$f(-2) = \frac{5-3i}{4}$$

2. (a) C'est reparti. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = \frac{-3+i-i}{\frac{-3+i}{2}-2i} = \frac{-3}{\frac{-3-3i}{2}} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$$

Conclusion,

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = 1-i$$

(b) On a les égalités suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Or $\sqrt{2} > 0$, conclusion, la forme exponentielle de $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$ est

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(c) Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2021} &= \sqrt{2}^{2021}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}\times 2021} \\
&= \sqrt{2}^{2020}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}(252\times 8+5)} \\
&= 2^{1010}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2i\pi\times 252 - i\frac{5\pi}{4}} \\
&= 2^{1010}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{4}} \\
&= 2^{1010}\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&= 2^{1010}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2^{1010}(-1+i)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2021} = 2^{1010}(-1+i)$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(z) \in \mathbb{U} &\iff f(z) \in \mathbb{U} \\
&\iff |f(z)|^2 = 1 \\
&\iff f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
&\iff \frac{2z-i}{z-2i}\overline{z}+i \\
&\iff (2z-i)(2\overline{z}+i) = (z-2i)(\overline{z}+2i) \qquad\qquad \text{car } z \neq 2i \text{ et donc } \overline{z}+2i \neq 0 \\
&\iff 4z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+1 = z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4 \\
&\iff 3z\overline{z} = 3 \\
&\iff 3|z|^2 = 3 \\
&\iff |z|^2 = 1 \\
&\iff z \in \mathbb{U}.
\end{aligned}$$

On remarque que $2i \notin \mathbb{U}$. Donc il n'est pas nécessaire d'enlever cette valeur de l'ensemble solution. Conclusion,

$$\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mid f(z) \in \mathbb{U}\right\} = \mathbb{U}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$, on pose $g(z) = \operatorname{Im}(f(z))$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f(z)) &= \frac{f(z)-\overline{f(z)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{2z-i}{z-2i} - \frac{2\overline{z}+i}{\overline{z}+2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\frac{(2z-i)(\overline{z}+2i)-(2\overline{z}+i)(z-2i)}{(z-2i)(\overline{z}+2i)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{2|z|^2+4iz-i\overline{z}+2-2|z|^2+4i\overline{z}-iz-2}{|z-2i|^2} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{3iz+3i\overline{z}}{|z-2i|^2} \\
&= \frac{3}{|z-2i|^2}\frac{z+\overline{z}}{2} \\
&= \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}, \quad g(z) = \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$, on pose $g(z) = \operatorname{Im}(f(z))$.

5. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$f(z) \in \mathbb{R} \quad\iff\quad g(z) = \operatorname{Im}(f(z)) = 0.$$

Donc par la question précédente, on a

$$f(z) \in \mathbb{R} \quad\iff\quad \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2} = 0 \quad\iff\quad \operatorname{Re}(z) = 0 \quad\iff\quad z \in i\mathbb{R}$$

Attention, cette fois-ci, on n'oublie pas d'enlever la valeur $2i$:

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\right\} = i\mathbb{R}\backslash\{2i\}.$$

6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a
$$\theta \in A \iff 2\mathrm{e}^{i\theta} \neq 2i = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \iff \mathrm{e}^{i\theta} \neq \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$$
Par la pseudo-unicité de la forme polaire, on a
$$\theta \in A \iff \forall k \in \mathbb{Z},\quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Conclusion,
$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}$.
   (a) On a les égalités suivantes :
$$|z - 2i|^2 = \left|2\mathrm{e}^{i\theta} - 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2 = 4\left|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2.$$
   Par factorisation par l'angle moitié,
$$\begin{aligned} |z - 2i|^2 &= 4\left|\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} - \mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)\right|^2 \\ &= 4\left|\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right|^2 \left|2i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 \\ &= 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$|z - 2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
   (b) Par ce qui précède,
$$g(z) = \frac{3\,\mathrm{Re}(z)}{|z - 2i|^2} = \frac{3\,\mathrm{Re}\left(2\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{6\cos(\theta)}{16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$
   Conclusion,
$$g(z) = \frac{3\cos(\theta)}{8\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

8. On observe que $-2 = 2\mathrm{e}^{i\pi}$. Donc en posant $\theta = \pi \in A$ dans la question précédente, on trouve que
$$g(-2) = \frac{3\cos(\pi)}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{3}{4}.$$
   Or par la question 1. on a $f(-2) = \dfrac{5 - 3i}{4}$ et par conséquent, on retrouve bien que
$$g(-2) = \mathrm{Im}(f(-2)) = -\frac{3}{4}.$$
   Conclusion,
$$g(-2) = -\frac{3}{4}$$

9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z)=\omega \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2z-i}{z-2i}=\omega \quad \Longleftrightarrow \quad 2z-i=\omega(z-2i) \quad \text{car } z\neq 2i \\ &\Longleftrightarrow \quad 2z-i=\omega z-2i\omega \\ &\Longleftrightarrow \quad 2i\omega - i = z(\omega-2). \end{aligned}$$

Premier cas, si $\omega=2$, on a

$$4i-i=3i=0$$

ce qui est impossible. Dans ce cas l'ensemble solution est vide :

$$\mathcal{S}_1=\emptyset.$$

Second cas, $\omega\neq 2$. Alors,

$$f(z)=\omega \quad \Longleftrightarrow \quad z=i\frac{2\omega-1}{\omega-2}.$$

Dans ce cas, on obtient une unique possibilité. Vérifions que cette valeur est bien différente de $2i$:

$$\begin{aligned} 2i=i\frac{2\omega-1}{\omega-2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\omega-4=2\omega-1 \qquad \text{car } \omega\neq 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad -4=-1 \quad \text{impossible.} \end{aligned}$$

Donc $i\dfrac{2\omega-1}{\omega-2} \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$. Conclusion dans ce cas, l'ensemble des complexes solutions est

$$f(z)=\omega \quad \Leftrightarrow \quad z=i\frac{2\omega-1}{\omega-2}.$$

10. Par la question précédente, on obtient que tout complexe $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$ admet un et un seul antécédent z dans $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ par f. Conclusion,

La fonction f définit une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{2\}$.

De plus, toujours par la question précédente, on a

$$\forall \omega \in \mathbb{C}\backslash\{2\}, \quad f^{-1}(\omega)=i\frac{2\omega-1}{\omega-2}$$

11. Posons $\omega=1+i$. On observe que $1+i\neq 2$, donc

$$f^{-1}(1-i)=i\frac{2-2i-1}{1-i-2}=i\frac{1-2i}{-1-i}=i\frac{(1-2i)(-1+i)}{2}=i\frac{-1+i+2i+2}{2}=i\frac{1+3i}{2}=\frac{-3+i}{2}.$$

Conclusion,

$$f^{-1}(1+i)=\frac{-3+i}{2}.$$

Ce qui est bien cohérent avec la question 2.a car en composant par f, on retrouve que

$$f\circ f^{-1}(1-i)=f\left(\frac{-3+i}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1-i=f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$$