

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 2 exercices et 3 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 – Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$P(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (-14 + 10i)z - 16(1 + i).$$

1. Déterminer l'ensemble des imaginaires purs $z \in i\mathbb{R}$ tels que $P(z) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = 0$.
4. En déduire l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^{21} - (6 + i)z^{14} + (-14 + 10i)z^7 - 16(1 + i) = 0$$

Exercice 2 – Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)f(y) = \sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) \quad (\star\star)$$

1. Dans toute cette question, on considère f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant la relation $(\star\star)$.
 - (a) Vérifier que $f(0) = 0$.
 - (b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x)$.
 - (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} [y(f(x))^2 + x(f(y))^2]$$

- (d) Vérifier alors que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$ $(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 = 0$
 - (e) En déduire que la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante.
 - (f) Montrer alors que f est la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 2\sqrt{2x}$.
2. Conclure.

Problème 1 – Soit a un nombre réel. On considère la fonction

$$f_a : x \mapsto \ln(a + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a et $b = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ \sqrt{a^2 + 1} & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$.

1. Justifier que $b \geq 1$.
2. Résoudre l'équation $a + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ d'inconnue réelle x . On pourra distinguer deux cas suivant le signe de a .
3. Montrer que le domaine de définition de f_a est

$$\mathcal{D}_a = \begin{cases}]-\infty; -b] \cup [b; +\infty[& \text{si } a > 0 \\]-\infty; -b[\cup]b; +\infty[& \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

4. Déterminer sur quel domaine $\mathcal{D}'_a$ les théorèmes classiques de l'analyse assurent que f_a est dérivable.

On distinguera encore une fois deux cas suivant le signe de a .

5. Étudier la parité de f_a .
6. Calculer pour tout $x \in \mathcal{D}'_a$ la dérivée $f'_a(x)$. Quel est le sens de variation de f_a sur $\mathcal{D}'_a \cap \mathbb{R}^+$?
7. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de f_a .
(b) Déterminer la limite en b de f_a . On distinguera les cas où a est strictement positif, nul et strictement négatif.
8. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_a(x) - \ln(x)$. Que peut-on en déduire concernant les courbes représentatives de f_a et de $\ln$?
9. Tracer les allures des courbes représentatives de $f_{\sqrt{3}}$ et $f_{-\sqrt{3}}$. On fera apparaître les asymptotes verticales quand elles existent et on placera la courbe représentative de $\ln$.

Problème 2 – Partie 1 : Manipulation d'une expression trigonométrique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x)$$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. *Signe de $f(x)$, méthode 1.*

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2x)$ uniquement en fonction de $\cos(x)$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1.$$

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.

3. *Signe de $f(x)$, méthode 2.*

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\cos(2x)\sin^2(x)$$

(b) Retrouver alors le résultat de la question 2.c

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression de $f(x)$, autrement dit, donner une expression de $f(x)$ uniquement en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.

Partie 2 : Inégalité de Winkler

On pose :

$$g: x \mapsto \sin^2(x) + x \tan(x) - 2x^2.$$

5. Préciser $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g et vérifier que $]0; \frac{\pi}{2}[\subset \mathcal{D}_g$.

6. Calculer la dérivée de g sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

7. Montrer que

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g''(x) = 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2(1 + \tan^2(x))x \tan(x)$$

8. En déduire que

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g''(x) = \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2(1 + \tan^2(x))x \tan(x)$$

9. A l'aide de la question 3.a montrer que

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f(x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x).$$

10. En déduire que

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x))\tan(x)(4x - \sin(4x))$$

11. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\sin(t) \leq t$. Montrer que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) > 0$.

12. Conclure en démontrant l'inégalité de Winkler :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2.$$

Problème 3 – On considère l'application complexe suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{2i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{2z-i}{z-2i} \end{aligned}$$

1. Calculer $f(-2)$.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$.
 (b) Préciser sa forme exponentielle.
 (c) En déduire $\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2024}$.

3. Déterminer $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mid f(z) \in \mathbb{U}\right\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \operatorname{Im}(f(z))$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $g(z) = \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2}$.
5. En déduire $\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \mid f(z) \in \mathbb{R}\right\}$.
6. Déterminer $A = \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid 2e^{i\theta} \neq 2i\right\}$.
7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2e^{i\theta}$.
 (a) Montrer que $|z-2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
 (b) En déduire $g(z)$ en fonction de θ .
8. En déduire $g(-2)$, est-ce cohérent avec la question 1.?
9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résoudre, suivant les valeurs de ω , les solutions de l'équation $\omega = f(z)$, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
10. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et préciser f^{-1} .
11. Calculer $f^{-1}(1-i)$. Est-ce cohérent avec la question 2.a?