

# CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 1

## Exercice 1 –

1.  $\text{non}A$  est l'assertion :  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, (x \geq y \text{ OU } y \geq x+1)$ .

Montrons que  $\text{non}A$  est vraie.

Posons  $x = 0$ . Soit  $y \in \mathbb{N}$  quelconque. On distingue deux cas :

- si  $y = 0$ , alors  $x \geq y$  donc  $x \geq y$  OU  $y \geq x+1$  est vraie.
- si  $y > 0$ , puisque  $y$  est entier, on a  $y \geq 1$  donc  $y \geq x+1$ , donc  $x \geq y$  OU  $y \geq x+1$  est vraie.

Donc, par disjonction de cas,  $\text{non}A$  est vraie et donc  $A$  est fausse.

2.  $\text{non}B$  est l'assertion  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \neq y^3$ .

Montrons que  $B$  est vraie. On pose  $x = 1$  et  $y = 1$ . Alors  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$  et  $x^2 = 1 = y^3$ . Donc  $B$  est vraie.

3.  $\text{non}C$  est l'assertion  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (y > x \text{ ET } y^2 \geq x^2)$ .

Montrons que  $\text{non}C$  est vraie.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $y = |x| + 1$ . Alors  $y \in \mathbb{R}$ . On a  $y \geq x+1 > x$  et  $y^2 = |x|^2 + 2|x| + 1 \geq |x|^2 \geq x^2$ .  
Donc  $\text{non}C$  est vraie et  $C$  est fausse.

4.  $\text{non}D$  est l'assertion  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x < 0 \text{ ET } x \geq e^y)$ .

$D$  est vraie. Prouvons-le par disjonction de cas sur  $x$ .

Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $x \geq 0$ , alors  $x \geq 0$  OU  $x < e^y$  est vraie.

Si  $x < 0$ , alors  $e^y > 0 > x$ , donc  $x \geq 0$  OU  $x < e^y$  est vraie. Donc, par disjonction de cas,  $D$  est vraie.

## Exercice 2 –

1. « Si l'entier  $n$  est impair, alors l'entier  $n^2 - 1$  est divisible par 4. »
2. Supposons que l'entier  $n$  est impair. Alors, il existe un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ . Considérons un tel  $k$ . On a :

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k).$$

Puisque  $k^2 + k$  est un entier,  $4(k^2 + k)$  est divisible par 4 donc  $n^2 - 1$  est divisible par 4. On a montré que :

Si l'entier  $n$  est impair, alors l'entier  $n^2 - 1$  est divisible par 4.

3. La contraposée a la même valeur de vérité que l'implication de départ donc

l'assertion de départ est vraie.

**Exercice 3 –**1. Équation ( $E_1$ ).

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} |x-1| &= |3-x| \iff x-1 = 3-x \text{ Ou } x-1 = x-3 \\ &\iff 2x = 4 \text{ Ou } -1 = -3 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de ( $E_1$ ) est  $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{2\}}$ .

2. Inéquation ( $E_2$ ).

On procède par disjonction de cas.

- résolution sur  $] -\infty; 1[$ . Soit  $x \in ] -\infty; 1[$ . On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff -x+1+3-x > 7 \iff -2x > 3 \iff x < -\frac{3}{2}$$

L'inéquation est donc vérifiée sur  $\left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[$ .

- résolution sur  $[1; 3]$ . Soit  $x \in [1; 3]$ . On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff x-1+3-x > 7 \iff 2 > 7$$

Ceci n'est pas possible donc l'inéquation n'est pas vérifiée sur  $[1; 3]$ .

- résolution sur  $]3; +\infty[$ . Soit  $x \in ]3; +\infty[$ . On a :

$$|x-1| + |3-x| > 7 \iff x-1+x-3 > 7 \iff 2x > 11 \iff x > \frac{11}{2}$$

Or,  $\frac{11}{2} > 3$ . Ainsi, l'inéquation est vérifiée sur  $\left] \frac{11}{2}; +\infty \right[$ .

- Bilan.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est  $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[ \cup \left] \frac{11}{2}; +\infty \right[}$ .

3. Équation ( $E_3$ ).

Le terme  $\sqrt{2-x}$  est défini si et seulement si  $2-x \geq 0$ , donc si et seulement si  $x \leq 2$ .

Si  $x$  est un réel dans  $] -\infty, -1[$ , alors  $\sqrt{2-x} > 0$  et  $x+1 < 0$ . Donc l'équation n'a pas de solution sur  $] -\infty, -1[$ .

Soit  $x \in [-1; 2]$ . Puisque  $t \mapsto t^2$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a :

$$\begin{aligned} (E_3) &\iff (2-x = (x+1)^2) \\ &\iff 2-x = x^2 + 2x + 1 \\ &\iff x^2 + 3x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ Ou } x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Or, on a  $\frac{-3 - \sqrt{13}}{2} < \frac{-3}{2} < -1$  et  $9 < 13 < 16$  donc  $3 < \sqrt{13} < 4$  d'où

$$0 = \frac{-3+3}{2} < \frac{-3+\sqrt{13}}{2} < \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est  $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}}$ .

4. Les termes de l'équation  $(E_4)$  sont bien définis si et seulement si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} \leq \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1+x-2x(x+1)}{x(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \times \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x(x+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

On construit le tableau de signes de l'expression de gauche :

| $x$                                          | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ |
|----------------------------------------------|-----------|------|-----------------------|-----|----------------------|-----------|
| $x^2 - \frac{1}{2}$                          |           | +    | 0                     | -   | 0                    | +         |
| $x(x+1)$                                     |           | +    | 0                     | -   | 0                    | +         |
| $-2 \times \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x(x+1)}$ | -         |      | +                     | 0   | -                    |           |

On en conclut que l'ensemble des solutions de  $(E_4)$  est :

$$\mathcal{S}_4 = ]-\infty; -1[ \cup \left[ \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0[ \cup \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[.$$

**Exercice 4** – Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . On procède par analyse-synthèse.

**Analyse :** On suppose que  $f = g + h$  avec  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et qui s'annule en 0, et  $h$  une fonction de la forme  $x \mapsto a e^x$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x) + a e^x$ .

En particulier, pour  $x = 0$ , et par hypothèse sur  $g$ , on a :  $f(0) = a$ .

Ainsi,  $h$  est la fonction  $x \mapsto f(0) e^x$ .

Et donc,  $g$  est la fonction  $x \mapsto f(x) - f(0) e^x$ .

**Synthèse :** Posons  $g : x \mapsto f(x) - f(0) e^x$  et  $h : x \mapsto f(0) e^x$ .  $g$  et  $h$  sont toutes les deux définies sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) + h(x) = f(x) - f(0) e^x + f(0) e^x = f(x)$ .
- On a  $h$  qui est bien de la forme  $h \mapsto a e^x$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}$ .
- Enfin,  $g(0) = f(0) - f(0) e^0 = 0$ .

Par analyse-synthèse, on a bien montré l'existence et l'unicité de la décomposition.

**Exercice 5** –

1. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la propriété  $P_n$  : «  $u_n = 2^{n+2} - 3$  ».

**Initialisation :**  $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$  et  $u_0 = 1$  donc  $u_0 = 2^{0+2} - 3$  et donc  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n$  un entier naturel fixé.

Supposons que la propriété  $P_n$  est vraie.

On a  $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(2^{n+2} - 3) + 3 = 2^{n+3} - 6 + 3 = 2^{(n+1)+2} - 3$  donc la propriété  $P_{n+1}$  est vraie.

Par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3.$

2. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier  $n \geq 6$ , on considère la propriété  $P_n$  : «  $2^n \geq (n+2)^2$  ».

**Initialisation :**  $2^6 = 64$  et  $(6+2)^2 = 64$  donc  $2^6 \geq (6+2)^2$  donc  $P_6$  est vraie.

**Hérédité :** Soit un entier  $n \geq 6$  fixé.

On suppose que  $P_n$  est vraie, à savoir  $2^n \geq (n+2)^2$ . Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+2)^2.$$

Or,  $2(n+2)^2 - (n+3)^2 = 2(n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 6n + 9) = n^2 + 2n - 1$ .

Les deux racines de ce trinôme sont  $n_1 = -1 - \sqrt{2}$  et  $n_2 = -1 + \sqrt{2}$ . Ces deux racines sont inférieures à 6 et le coefficient dominant du polynôme est positif, donc  $n^2 + 2n - 1 \geq 0$ .

On obtient ainsi  $2(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$  et donc  $2(n+2)^2 \geq (n+3)^2$ .

Finalement,

$$2^{n+1} \geq 2(n+2)^2 \geq ((n+1)+2)^2$$

et  $P_{n+1}$  est vraie.

Par récurrence :  $\forall n \geq 6, 2^n \geq (n+2)^2$

**Exercice 6 –** Raisonnons par récurrence double.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P_n$  la propriété :  $u_n = 1 - (-2)^n$

- **Initialisation :**  $u_0 = 0$  et  $1 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$  donc la propriété  $P_0$  est vraie.

$u_1 = 3$  et  $1 - (-2)^1 = 1 - (-2) = 3$  donc la propriété  $P_1$  est vraie.

- **Hérédité :** soit  $n$  un entier naturel fixé. On suppose que les propriétés  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont vraies c'est-à-dire  $u_n = 1 - (-2)^n$  et  $u_{n+1} = 1 - (-2)^{n+1}$ . Montrons que  $P_{n+2}$  est vraie.

Par définition,  $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$  donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -(1 - (-2)^{n+1}) + 2(1 - (-2)^n) \\ &= -1 + (-2)^{n+1} + 2 - 2 \times (-2)^n \\ &= 1 + (-2)^{n+1} + (-2)^{n+1} \\ &= 1 + 2(-2)^{n+1} \\ &= 1 - (-2)(-2)^{n+1} \\ &= 1 - (-2)^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui signifie que la propriété  $P_{n+2}$  est vraie.

Par récurrence double, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 - (-2)^n$

**Exercice 7 –**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\tan$  est définie sur  $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$  et

$$2x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

$$\begin{aligned} \tan(2x) = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est  $\left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

2. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos(x) &\iff \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } x + \frac{3\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{-\pi}{8} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{4} = 2k\pi \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\pi}{4}$  n'est jamais égal à  $2k\pi$  quelque soit  $k$  entier,

l'ensemble des solutions est  $\left\{\frac{-\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

3. Les termes de l'équation sont bien définis pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On factorise par  $\sqrt{1^2 + 1^2}$ , soit  $\sqrt{2}$ .

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \iff \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

On cherche alors un angle  $\theta$  réel ayant pour sinus et pour cosinus  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .  $\theta = \frac{\pi}{4}$  convient.

$$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} &\iff \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\quad \text{ou } x - \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned}$$

l'ensemble des solutions est  $\left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Exercice 8 –**

1. (a) En utilisant les formules  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$  et  $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ , on obtient

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\cos^2(\theta) - 4(2\cos(2\theta) - 1) \\ &= 4(1 - \sin^2(\theta)) - 4(2(1 - 2\sin^2(\theta)) - 1) \\ &= 4 - 4\sin^2(\theta) - 4 + 16\sin^2(\theta) \\ &= 12\sin^2(\theta).\end{aligned}$$

On a bien :  $\Delta = 12\sin^2(\theta)$

- (b)
- Si  $\theta$  peut s'écrire  $\theta = k\pi$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $\sin(\theta) = 0$  et  $\Delta = 0$ , ce qui implique que l'équation (E) n'a qu'une seule solution (qui est réelle).
  - Sinon, on a  $\sin(\theta) \neq 0$  et donc  $\Delta > 0$ , et dans ce cas l'équation (E) possède deux solutions réelles distinctes.
2. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Posons  $\theta = k\pi$ . L'unique solution de (E) est alors  $\cos(\theta)$ . Par conséquent,
- si  $\theta = k\pi$  où  $k$  est un entier pair, l'unique solution de (E) est 1,
  - si  $\theta = k\pi$  où  $k$  est un entier impair, l'unique solution de (E) est  $-1$ .
3. (a) On a  $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}|\sin(\theta)|$  et  $\{\sqrt{\Delta}, -\sqrt{\Delta}\} = \{2\sqrt{3}\sin(\theta), -2\sqrt{3}\sin(\theta)\}$ . Ainsi, l'on obtient avec  $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) = \cos(b-a)$  et  $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$  :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2\cos(\theta) + 2\sqrt{3}\sin(\theta)}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \\ \text{et } x_2 &= \frac{2\cos(\theta) - 2\sqrt{3}\sin(\theta)}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Les deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation (E) sont  $x_1 = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$  et  $x_2 = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- (b) On résout le problème :  $x_1 = \sqrt{2}$  ou  $x_2 = \sqrt{2}$ . On a

$$\begin{aligned}x_1 = \sqrt{2} &\iff \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{et } x_2 = \sqrt{2} &\iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Le nombre  $\sqrt{2}$  est solution de (E) si et seulement si  $\theta$  appartient à

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Exercice 9 – Partie I**

1. *Méthode 1 : calcul de  $\cos \frac{\pi}{8}$ .*

(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.$$

(b) En prenant  $x = \frac{\pi}{8}$  dans la question 1, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Or  $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ , donc  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ . Par suite,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}.$$

Conclusion,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

2. *Méthode 2 : calcul de  $\cos \frac{\pi}{8}$ .*

(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 \\ &= 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 \\ &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$$

(b) En prenant  $x = \frac{\pi}{8}$  dans la question précédente, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1$$

Donc en posant  $X = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ , on a

$$0 = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

Conclusion,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  est une solution de l'équation  $8X^4 - 8X^2 + 1 = 0$  d'inconnue  $X \in \mathbb{R}$ .

(c) Soit  $\Delta$  le discriminant de  $8u^2 - 8u + 1$ . On a

$$\Delta = 64 - 32 = 32 = 2 \times 16.$$

Par conséquent les racines associées sont

$$u_1 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Conclusion, les racines de  $8u^2 - 8u + 1$  sont  $u_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$  et  $u_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ .

- (d) D'après la question (b), on sait que  $u = X^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$  est une solution de l'équation  $8u^2 - 8u + 1$ . Donc d'après la question (c),

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \text{OU} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Or on note que

$$0 \leq \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

et  $0 \leq \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$  donc  $0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  puis, par la stricte croissance de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ . Ainsi

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} < \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Comme  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \neq \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ , on en déduit nécessairement que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Or on sait que  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ . Conclusion,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

3. (a) Par la formule fondamentale et la question précédente, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Or  $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ . Par conséquent,

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

De là, on en déduit également, avec la valeur du cosinus précédemment calculée, que

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} \\ &= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Or on note que  $3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = (\sqrt{2}-1)^2$ . Donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1 \quad \text{car } \sqrt{2}-1 > 0$$

Conclusion,

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$

(b) On observe que  $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ . Donc par ce qui précède,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

De plus  $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  et donc de même

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Enfin, on observe que  $\frac{371\pi}{8} = \frac{(8 \times 46 + 3)\pi}{8} = 23 \times 2\pi + \frac{3\pi}{8}$ . La fonction cosinus étant  $2\pi$ -périodique, on a

$$\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \cos\left(23 \times 2\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

et par ce qui précède,  $\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ . Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

4. (a) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Par des formules de linéarisation, on a

$$\begin{aligned} \sin^4(\theta) &= (\sin^2(\theta))^2 = \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)}{4} \\ &= \frac{1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}}{4} \\ &= \frac{3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8} \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\sin^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}}$$

(b) D'après la question précédente avec  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , on a

$$\begin{aligned} \sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8} \\ &= 0 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}}$$

Vérifions que ce résultat est compatible avec la valeur de  $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$  trouvée à la question 3.(a) :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^4 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}$$

Ce calcul est donc bien cohérent avec la valeur précédemment trouvée.

**Partie II**

5. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les égalités entre réels suivants :

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2 \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\sin(3x) \right).$$

Donc d'après les calculs de la partie I ,

$$\begin{aligned} \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) &= 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(3x) \right) \\ &= 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (E) &\iff 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff 3x + \frac{\pi}{8} \equiv 2x + \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{OU} \quad 3x + \frac{\pi}{8} \equiv -2x - \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi] \quad \text{OU} \quad 5x \equiv -\frac{5\pi}{8} [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv -\frac{\pi}{8} \left[ \frac{2\pi}{5} \right]. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$(E) \iff x \in \left\{ \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) On observe que  $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{8} \leq \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{8} \leq 0$ .

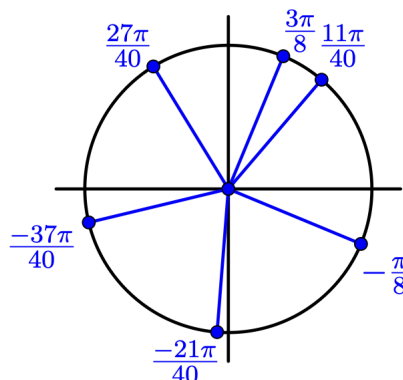
Puis si  $k = 1$ ,  $-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi + 16\pi}{40} = \frac{11\pi}{40} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{40}$  (légèrement supérieur à  $\frac{\pi}{4}$ ),

si  $k = 2$ ,  $-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{11\pi + 16\pi}{40} = \frac{27\pi}{40} \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right[$ ,

si  $k = -1$ ,  $-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi - 16\pi}{40} = -\frac{21\pi}{40} \in \left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4} \right[$ ,

si  $k = -2$ ,  $-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{5} = \frac{-21\pi - 16\pi}{40} = -\frac{37\pi}{40} \in \left] -\frac{3\pi}{4}; -\pi \right[$ .

D'où la figure suivante :



Et l'ensemble des solutions de (E) dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  est

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{37\pi}{40}; -\frac{21\pi}{40}; -\frac{\pi}{8}; \frac{11\pi}{40}; \frac{3\pi}{8}; \frac{27\pi}{40} \right\}.$$

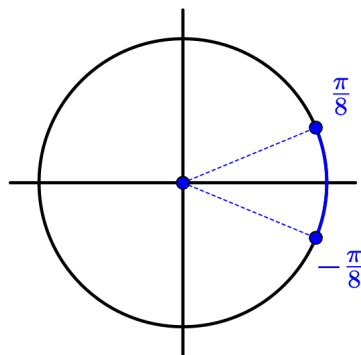
6. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a l'équivalence suivante :

$$2 \cos(x) > \sqrt{2 + \sqrt{2}} \iff \cos(x) > \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Donc d'après la partie 1 ,

$$2 \cos(x) > \sqrt{2 + \sqrt{2}} \iff \cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

On observe donc que cela correspond à la partie bleue suivante du cercle trigonométrique :



Par conséquent,

$$2 \cos(x) > \sqrt{2 + \sqrt{2}} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + 2k\pi.$$

Conclusion,

$$2 \cos(x) > \sqrt{2 + \sqrt{2}} \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{8} + 2k\pi; \frac{\pi}{8} + 2k\pi \right].$$

### Exercice 10 –

1. (a) Soient  $x$  et  $y$  des réels. Alors,  $f_1(x) = x$  et  $f_1(y) = y$ , donc

$$|f_1(x) + f_1(y)| = |x + y|.$$

Donc  $f_1$  vérifie bien (E).

(b) Soient  $x$  et  $y$  des réels. Alors,  $f_2(x) = -x$  et  $f_2(y) = -y$ , donc

$$|f_2(x) + f_2(y)| = |-x - y| = |-(x + y)| = |x + y|.$$

Donc  $f_2$  vérifie bien (E).

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$f(x) = |x| \iff (f(x) = x \text{ OU } f(x) = -x).$$

D'où,  $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x])}$ .

3. (a) Pour  $x = 0$  et  $y = 0$ , on obtient :

$$|f(0) + f(0)| = |0 + 0|$$

$$|2f(0)| = |0|$$

$$2|f(0)| = 0$$

Donc  $f(0) = 0$ .

- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, comme  $f(0) = 0$ ,

$$|f(x) + f(0)| = |x + 0|$$

$$|f(x) + 0| = |x|$$

$$|f(x)| = |x|$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$ .

- (c) i. La négation demandée est

$$(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ Et } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x).$$

- ii. Comme  $f$  vérifie  $(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|)$  (question 3.b), en utilisant la question 2, on en déduit que  $f$  vérifie  $(\forall x \in \mathbb{R}, [f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x])$

Supposons que  $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ Et } (\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x)$ .

On note  $x$  un réel tel que  $f(x) \neq x$  et  $y$  un réel tel que  $f(y) \neq -y$ .

Comme  $f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x$  et  $f(x) \neq x$ , on obtient que  $f(x) = -x$ .

De même,  $f(y) = y \text{ Ou } f(y) = -y$  et  $f(y) \neq -y$ , donc  $f(y) = y$ .

Comme  $f$  vérifie (E), on a  $|f(x) + f(y)| = |x + y|$ . Donc  $|-x + y| = |x + y|$ . Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

• Si  $-x + y = x + y$ , alors  $-x = x$  donc  $x = 0$ . Donc  $f(0) = 0$  (par quest. 3.a). Or  $f(x) \neq x$ , donc ceci fournit une contradiction.

• Si  $-x + y = -(x + y)$ , alors  $y = -y$  donc  $y = 0$ . Donc  $f(0) = 0$  (par quest. 3.a). Or  $f(y) \neq -y$ , donc ceci fournit une contradiction.

On en déduit que notre hypothèse est fausse, et donc que sa négation est vraie, c'est-à-dire que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ Ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

Autrement dit,  $f$  est forcément la fonction  $f_1$  ou la fonction  $f_2$ .

4. On procède par analyse synthèse.

La question 3 réalise l'analyse et montre que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont les seules fonctions candidates à vérifier (E).

La synthèse a été réalisée dans la question 1, où l'on a montré que  $f_1$  et  $f_2$  vérifient (E).

Conclusion : L'ensemble des fonctions vérifiant (E) est  $\{f_1, f_2\}$ .